Piano Lauree Scientifiche Piemonte 2014
in collaborazione con il GeoGebra Institute of Torino
e il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino

Pierangela Accomazzo, Silvia Beltramino, Ada Sargenti

ESPLORAZIONI MATEMATICHE CON GEOGEBRA II

A cura di:

Ornella Robutti

Ledizioni

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy
www.ledizioni.it
info@ledizioni.it

Pierangela Accomazzo, Silvia Beltramino, Ada Sargenti
ESPLORAZIONI MATEMATICHE CON GEOGEBRA II
A cura di: Ornella Robutti, Ledizioni 2014

ISBN 978-88-6705-255-4

Immagine in copertina: Elaborazione ottenuta con il software geogebra

Informazioni sul catalogo e sulle ristampe dell'editore: www.ledizioni.it

INDICE

PRESENTAZIONE

GeoGebra e il Piano nazionale Lauree Scientifiche

Ornella Robutti

Dipartimento Matematica Università di Torino

Responsabile PLS Piemonte, Responsabile del GeoGebra Institute di Torino

1. Le tecnologie nell'educazione matematica

Vi è un crescente consenso nella ricerca didattica sul fatto che la tecnologia stia diventando parte integrante dell'insegnamento e apprendimento della matematica, offrendo nuove forme di rappresentazioni dinamiche e di comunicazione (Heid & Blume, 2008; Kaput, Hegedus & Lesh, 2007). Infatti, le nuove tecnologie sono in grado di fornire più risorse per la rappresentazione degli oggetti matematici, per l'esplorazione delle idee matematiche complesse (Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008) e per favorire la profonda comprensione dei concetti matematici. C'è un accordo generale dei ricercatori sui potenti ruoli pedagogici e cognitivi delle multi-rappresentazioni dinamiche, in quanto si è visto che supportano dinamiche di pensiero fruttuose per la costruzione di significati e per le argomentazioni (Arzarello & Robutti, 2010). Tuttavia, per la maggioranza degli insegnanti, la sola tecnologia è insufficiente per il successo nell'apprendimento dei loro allievi, ed è importante invece un'adeguata formazione professionale, non solo nell'uso delle risorse tecnologiche, ma anche e soprattutto nelle metodologie didattiche e nella progettazione di lezioni in cui si usi la tecnologia o più tecnologie (Drijvers et al., 2010). Tale formazione deve puntare all'integrazione delle tecnologie nella pratica didattica facendo comprendere le possibilità, i limiti, la natura delle rappresentazioni fornite dalla tecnologia, in relazione ai concetti sviluppati secondo i curricula vigenti (Ruthven & Hennessy, 2002). Se nei primi anni dell'introduzione delle tecnologie nella scuola questa integrazione sembrava facilmente realizzabile, oggi si è visto, in quasi tutti i Paesi, che il compito è tutt'altro che semplice e di breve durata: occorrono molti anni affinché una tecnologia si diffonda e diventi di uso condiviso, integrato nella pratiche ordinarie dei docenti. Per esempio, se l'uso delle lavagne interattive si è largamente diffuso negli ultimi anni, ad esso non si è accompagnato un utilizzo consapevole delle potenzialità che esse offrono, e per questo sono state sotto-utilizzate, spesso solo come mezzo per proiettare e non come lavagna in cui praticare l'interazione dinamica su oggetti matematici tra e con gli studenti.

Recenti studi mettono in luce come il cambiamento si giochi tutto sulla formazione dei docenti, non condotta con sistemi tradizionali di lezioni frontali, ma costruendo comunità di pratica (Wenger, 1998) che siano vere e proprie comunità di indagine, ovvero di ricerca condivisa di attività, di progettazione didattica, di metodologie, di uso di tecnologie e di metodi di valutazione (Jaworski, 2006).

Il gruppo di ricerca di Torino, insieme a quello di Modena, ha messo a punto un modello descrittivo e dinamico del processo di formazione dei docenti in queste comunità, quando entrano in contatto con la comunità dei ricercatori in didattica della matematica: la Trasposizione Meta-Didattica (TMD). Questo modello, presentato nel 2012 al Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica (http://www.seminariodidama.unito.it/mat12.php), si basa sulla Teoria Antropologica della Didattica della Matematica (Chevallard, 1999), ma si concentra principalmente sugli aspetti "meta" che riguardano la riflessione sul processo di formazione dei docenti (considerando le azioni di ricercatori, formatori e docenti stessi).

La TAD (Teoria Antropologica della Didattica della Matematica) propone un modello epistemologico per la conoscenza matematica in cui la nozione di praxeologia ricopre un ruolo fondamentale. La praxeologia è strutturata secondo due livelli (Garcia et al., 2006):

- Livello della praxis o del “know how”: è il livello del saper fare, include differenti classi di problemi e le tecniche usate per risolverli (blocco pratico-tecnico);
- Livello del logos o della “knowledge”: è il livello della conoscenza, del sapere e include i discorsi e i ragionamenti teorici che descrivono, giustificano e spiegano le tecniche usate per risolvere i problemi (blocco tecnologico-teorico).

Il modello della TMD fa riferimento alle praxeologie meta-didattiche, cioè alle praxeologie globali, riferite alle pratiche e alle riflessioni sulle pratiche che vengono utilizzate nei differenti progetti di formazione dei docenti e che comprendono tutte le forme di interazione con gli insegnanti in formazione. Le praxeologie meta-didattiche si distinguono da quelle didattiche perché affrontano un diverso tipo di compiti e di problemi: quelli delle praxeologie didattiche riguardano la modellizzazione dell’apprendimento-insegnamento della matematica o di suoi specifici ambiti, mentre quelli delle praxeologie meta-didattiche riguardano la modellizzazione della formazione degli insegnanti. Pertanto tecniche, tecnologie e teorie sono ben distinte nelle due. Più precisamente, nelle praxeologie meta-didattiche il blocco pratico-tecnico si riferisce alle pratiche sviluppate all’interno della comunità di indagine per la gestione della formazione degli insegnanti; il blocco tecnologico-teorico si riferisce all’elaborazione teorica sulle pratiche adottate. Il modello della TMD considera il meccanismo mediante il quale, con i vari progetti di formazione, le praxeologie proprie della comunità di ricerca sono trasposte agli insegnanti, incidendo quindi sulla loro professionalità. Si parla quindi di Trasposizione Meta-Didattica in quanto l’oggetto primo della trasposizione sono le praxeologie relative all’insegnamento-apprendimento della matematica (praxeologie meta-didattiche).

Si assiste dunque a uno slittamento dal “sapere sapiente” alle conoscenze matematiche e pedagogiche necessarie per l’insegnamento, che diventano oggetto della trasposizione meta-didattica (Arzarello et al., 2012; Aldon et al., 2013; Arzarello et al., 2014).

Il modello considera infatti due tipi di comunità coinvolte nel processo di formazione degli insegnanti: la comunità dei ricercatori (che organizza e gestisce le attività di formazione) e la comunità degli insegnanti (cha partecipano al progetto), ciascuna delle quali possiede delle praxeologie proprie. Nel corso del processo di formazione si costituisce una comunità di indagine (costituita da ricercatori ed insegnanti), che costruisce proprie praxeologie metadidattiche (le praxeologie condivise), frutto dell’interazione con le praxeologie didattiche di partenza possedute dagli insegnanti da formare e più o meno vicina alle praxeologie “ideali” proprie della comunità dei ricercatori, la cui acquisizione è l’obiettivo ideale del corso di formazione (Arzarello et al., 2012). Le praxeologie di ricercatori e insegnanti possono essere, già in partenza, a intersezione non vuota, ma lo scopo delle attività di formazione dei docenti è quello di trasformare le praxeologie degli insegnanti in nuove praxeologie, che siano una fusione delle praxeologie delle due comunità coinvolte, diventando quindi delle praxeologie condivise.

Per la creazione delle praxeologie condivise è fondamentale la figura del “broker” (mediatore), che è quel soggetto che appartiene a più di una comunità ed è in grado di creare nuove connessioni tra di esse e aprire nuove possibilità di creazione di significati e di apprendimento (Rasmussen et al., 2009).

La trasposizione meta-didattica è allora centrata su specifiche azioni di “brokering” tra le varie comunità (che possono essere identificate a seconda dei contesti nell’apprendistato cognitivo, nella formazione blended tramite piattaforma e incontri in presenza delle attività di formazione docenti nel Piano Lauree Scientifiche - PLS, …). Molto spesso a ricoprire il ruolo dei broker sono i ricercatori o i docenti-ricercatori (che si occupano della formazione), essi appartengono infatti a entrambe le comunità coinvolte e sono in grado di consentire il boundary crossing.

I docenti-ricercatori agiscono come broker poiché, da un lato, conoscono i paradigmi innovativi che provengono dalla ricerca, e dall’altro lato condividono con gli insegnanti il medesimo status e le stesse esperienze in classe (Aldon et al., 2013).

Durante il corso di formazione per insegnanti inserito nell'ambito del PLS, viene utilizzato un diario di bordo, richiesto per verificare dal punto di vista istituzionale la sperimentazione effettuata. Tale strumento in realtà appartiene alle praxeologie dei ricercatori, in quanto è pensato come un supporto per gli insegnanti per pianificare e monitorare il proprio lavoro, ma è in grado di spostare l'attenzione del docente (che lavora in classe e osserva il proprio lavoro) dal prodotto al processo. Il diario di bordo diventa quindi uno strumento di confine (boundary object) nel momento in cui gli insegnanti lo usano e la sua stesura ri-orienta la pratica didattica in classe e favorisce la riflessione sulle proprie pratiche didattiche, contribuendo allo sviluppo professionale dei docenti e al fenomeno del boundary crossing, ovvero al passaggio tra le due comunità.

Il processo della Trasposizione Meta-Didattica è un processo dinamico, abbiamo già detto che all'inizio del percorso di formazione troviamo due differenti comunità con le proprie praxeologie, che nel corso del tempo danno vita alle praxeologie condivise grazie all'azione dei broker. In questo processo dinamico concorrono varie componenti delle praxeologie, che possono essere considerate esterne o interne rispetto alla comunità che consideriamo di volta in volta. Sono componenti interne per i ricercatori le tecniche e le tecnologie che costituiscono le praxeologie dei ricercatori (per esempio il problema aperto, l'uso di GeoGebra o la discussione matematica), mentre sono componenti esterne per questi ultimi le praxeologie proprie delle istituzioni da cui provengono gli insegnanti da formare (per esempio l'orario scolastico e i libri di testo o l'uso del laboratorio). L'intersezione di queste praxeologie può non essere vuota, ma può accadere che le due comunità utilizzino il medesimo termine per indicare concetti o processi non coincidenti (per esempio ciò che si intende per approccio laboratoriale o discussione matematica). A partire da questi termini che appartengono ad entrambe le comunità possono avvenire interessanti azioni di brokering ad opera dei ricercatori o dei docenti-ricercatori (Aldon et al., 2013).

L'obiettivo che si vuole raggiungere con i laboratori di formazione docenti PLS, è quello di confrontare le praxeologie dei ricercatori con quelle proprie degli insegnanti, per creare della praxeologie condivise, che possano essere fruttuose per le praxeologie didattiche da applicare in classe e che diventino patrimonio ordinario della professionalità docente. Le componenti esterne (la partecipazione ai laboratori del PLS per esempio, l'uso della piattaforma per la formazione a distanza, le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida, l'uso di tecnologie per la matematica, …), grazie all'azione di brokering si possono trasformare man mano in componenti interne e contribuire alla creazione delle praxeologie condivise. Questo processo di trasformazione non è automatico, non è semplice e potrebbe a volte non accadere (Clark-Wilson et al., 2014).

Analizzando il processo della Trasposizione Meta-Didattica avvenuta a livello di corsi di formazione PLS, possiamo riconoscere tra le praxeologe dei ricercatori all'inizio del percorso di formazione il design delle attività da proporre agli insegnanti. Durante il corso, gli insegnanti affrontano le attività sotto differenti punti vista (dapprima da studenti e solo successivamente analizzano le attività con la "lente" del docente, riflettendo anche sugli aspetti "meta"). Il confronto all'interno della comunità degli insegnanti e l'azione fondamentale dei broker fanno sì che, alla fine del percorso di formazione dopo la sperimentazione delle attività in classe, gli insegnanti abbiano trasformato da esterne a interne alcune componenti legate all'uso di GeoGebra, all'applicazione delle Indicazioni nazionali, e all'uso di metodologie didattiche (didattica laboratoriale, lavori di gruppo, problem solving…), e siano in grado di progettare essi stessi delle attività per i propri studenti. Il design delle attività per gli studenti costituisce quindi una praxeologia condivisa, frutto della TMD che tiene conto di tutte le componenti inizialmente esterne per i docenti che sono divenute interne.

2. GeoGebra

GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/) è un DGS, cioè un "Dinamic Geometry Software", si tratta dunque di un software di geometria dinamica con cui gli studenti possono costruire figure attraverso l'uso di comandi che permettono di collocare oggetti geometrici (punti, rette, segmenti, poligoni, cerchi, ecc.) su un piano.

GeoGebra, come altri DGS diffusi in precedenza (Cabri-Géomètre in area europea, The Geometer Sketchpad in area nord-americana) ha la peculiarità di essere un software dinamico. Gli studenti sono infatti in grado di costruire figure geometriche sulla base di certe proprietà e di manipolare dinamicamente queste costruzioni (trascinare, allargare, far scorrere un punto su un oggetto), senza variare il protocollo geometrico di costruzione e mantenendo quindi inalterate le proprietà dell'oggetto. GeoGebra, però, ha una caratteristica differente rispetto agli altri software citati: è gratuito. Si tratta quindi di un software che si sta diffondendo in tutto il mondo. GeoGebra è una di quelle infrastrutture rappresentazionali (Hegedus & Moreno-Armella, 2009), che si diffondono a macchia d'olio nelle scuole di ogni livello e di ogni Paese, nei centri di formazione per insegnanti, nelle Università, nei centri di ricerca, nei progetti internazionali di ricerca didattica, per la loro facilità d'uso, il loro libero download, diventando in pochi anni pervasivi nel mondo dell'educazione. Questa diffusione non è dovuta solamente alle caratteristiche d'uso (affordances, secondo Hegedus e Moreno-Armella, 2009) finalizzate all'utente, ma anche al fatto che il terreno preparato in tanti anni dalla diffusione dei software geometrici come Cabri e Sketchpad (Sinclair & Robutti, 2013) ha determinato un'accoglienza unanime da parte del mondo della scuola e dell'Università. Inoltre GeoGebra cerca di andare oltre, nelle affordances, rispetto ai software che lo hanno preceduto. Infatti, consente non solo la costruzione e la manipolazione di figure geometriche nel piano euclideo e in quello cartesiano, ma anche una buona gestione simbolica degli oggetti geometrici: possiede due ambienti integrati, uno numerico (simile a un foglio elettronico) e uno di calcolo simbolico (un vero e proprio CAS – Computer Algebra System). Per finire, i file costruiti in GeoGebra possono essere caricati sul web come applet dinamici interattivi e consentire alla comunità di utilizzarli e manipolarli pur senza aprire GeoGebra.

In pochi anni, da quando fu creato dal suo ideatore, uno studente austriaco, Markus Hohenwarter, che faceva la sua tesi di laurea, GeoGebra si è diffuso in tutto il mondo e oggi può vantare la traduzione in decine e decine di lingue diverse e un uso su tutti i continenti, a qualunque livello scolare (Hohenwarter et al., 2009).

Il software GeoGebra si avvale, dopo la sua nascita, della competenza di ricercatori e programmatori di tutto il mondo per evolvere e fornire non solo sempre nuove possibilità di uso agli utenti, ma anche nuove implementazioni su supporti diversi. Per esempio, da semplice software di geometria dinamica, oggi GeoGebra si è esteso per incorporare foglio di calcolo, strumento di manipolazione simbolico, visualizzazioni simultanee di diversi ambienti. Inoltre, si sta estendendo il suo uso, che non è solo più accessibile come download su computer, e ovviamente utilizzabile sulla LIM, ma anche di uso on-line, o come applicazione su tablet.

Iniziata una ventina di anni fa, la ricerca internazionale in didattica della matematica con i software di geometria dinamica, oggi continua includendo anche GeoGebra, ed utilizzando filoni già consolidati e altri più nuovi. Possiamo identificare alcune grandi linee di ricerca didattica che toccano la matematica (anche se i software di geometria dinamica vengono utilizzati non solo in matematica, ma in fisica, nelle scienze sperimentali, in economia, in geografia, …). Tali linee di ricerca che qui presento sono identificate sulla base delle affordances che i software presentano:

- la dinamicità, ottenuta tramite la funzione di trascinamento (dragging);
- la misura (di lunghezze di segmenti, di ampiezze di angoli, di aree di figure, …);
- la traccia, il luogo, l'animazione (che consentono di vedere l'evoluzione di modelli);
- la rappresentazione di funzioni e l'indagine del loro grafico, a livello locale o globale;
- l'integrazione di registri di rappresentazione diversi (come quello geometrico e quello analitico), che consente di modellizzare situazioni problematiche.

L'oggetto matematico che gli studenti utilizzano in un software di geometrica dinamica può essere da loro visto in due modi diversi: come semplice figura (ossia facendo leva sugli aspetti percettivi di osservazione) oppure come figura legata a una teoria (cioè facendo leva sugli aspetti concettuali). Questa base teorica, formulata nell'ambito della psicologia da Fischbein (1993), ha permeato la ricerca sull'apprendimento della matematica, con e senza software (Laborde, 2004). Con il software si fa anche più pressante l'attenzione sugli studenti, in quanto la loro tentazione a fermarsi ai soli aspetti percettivi della figura è forte, perché il software offre non solo il disegno, ma anche una molteplicità di disegni ottenibili con il trascinamento. Se vogliamo quindi far passare pensiero teorico, avviando alla dimostrazione (che la base della struttura teorica della matematica), occorre agire nell'insegnamento con grande attenzione e sensibilità didattica (Marrades & Gutierrez, 2000; Olivero, Paola, & Robutti, 2001).

Questi risultati di ricerca didattica sono stati fondamentali per dare indicazioni sull'insegnamento della matematica con i software di geometria dinamica come GeoGebra. Naturalmente è stato necessario riflettere sulla necessità di un cambiamento nell'insegnamento della matematica, che si presenta essenzialmente come metodologico. I risultati di ricerca confermano questa necessità e garantiscono efficacia sia nei processi di insegnamento, sia in quelli di apprendimento (Noss et al., 1997; Laborde et al., 2006). Tale cambiamento si realizza non già proponendo con l'uso del software problemi e attività in forma tradizionale, bensì formulando i compiti in modo del tutto nuovo.

A seconda del tipo di problema, si possono identificare nei risultati di ricerca queste proposte di cambiamento:

- problema di costruzione: classico problema di geometria risalente agli antichi greci, che consiste nel costruire figure geometriche utilizzando riga e compasso, quindi basando la costruzione su proprietà e assiomi della geometria euclidea. Un software come GeoGebra può essere utilizzato in sostituzione della riga e del compasso, purché gli studenti siano consapevoli che non è sufficiente ottenere la figura richiesta, ma che questa figura, una volta trascinata (e qui entra in gioco il dragging), mantenga le stesse caratteristiche (cioè, per esempio, un quadrato continui ad essere un quadrato e non diventi un quadrilatero qualunque) (Olivero, Paola & Robutti, 2011). Tale problema di costruzione può essere seguito dalla richiesta di spiegare perché la costruzione è stata fatta in un certo modo, e quindi giustificarla utilizzando la teoria (si entra qui nel mondo della dimostrazione). Esempio di problema di costruzione può essere il seguente: "Costruire la circonferenza che passa per il punto P ed è tangente alla retta l nel punto Q. Spiegare perché la figura ottenuta è proprio la circonferenza richiesta".
- Problema di esplorazione: può essere il classico problema di dimostrazione, in cui però non viene richiesto un compito del tipo "dimostra che…", di fronte a cui la maggior parte di studenti pensa che sia necessario un lampo di genio per riuscire a trovare la dimostrazione e così rimane bloccata (Arzarello et al., 2002; Olivero & Robutti, 2007). Ma si tratta di un problema formulato in modo aperto, che lascia la possibilità di esplorare una situazione geometrica, di formulare una congettura, di validarla e quindi, di dimostrarla, una volta convenuto che non è sufficiente vedere con il software che una certa tesi funziona, ma che bisogna giustificarla nel sistema teorico. La potenzialità dei problemi aperti è che essi favoriscono una vasta produzione matematica, nel senso che tutti gli studenti riescono a trovare soluzioni, più o meno complesse, relative alla situazione che stanno esplorando. Il ruolo della dimostrazione è poi quello di precisare come le proprietà scoperte, formulate mediante le congetture prodotte, possano essere dedotte dagli assiomi della teoria considerata, in questo caso la geometria euclidea.
- Problema di modellizzazione: quello in cui si chiede di determinare il massimo o il minimo di una certa grandezza, oppure di studiare come varia una grandezza in funzione di un'altra (Arzarello, Ferrara & Robutti, 2012). Anche qui, come nei precedenti tipi di problemi, occorre una rivisitazione del tipo di problema nella sua forma tradizionale, in quanto, anziché buttarsi sui conti, gli studenti possono visualizzare la situazione tramite una sua rappresentazione grafica, integrata magari da rappresentazioni numeriche (tabelle numeriche di dati), o simboliche (formule).

3. L'attività del GeoGebra Institute di Torino

Nel luglio 2010 è stato fondato a Torino l'Istituto Italiano di GeoGebra (primo in Italia: http://community.geogebra.org/it/; Robutti, 2013), ospitato dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino (www.dm.unito.it) ed operante in collaborazione con l'associazione La Casa degli Insegnanti (http://www.lacasadegliinsegnanti.it/PORTALE/).

L'Istituto di Torino condivide con l'International GeoGebra Institute (http://www.geogebra.org/igi/) le seguenti finalità (Robutti & Sargenti, 2012):

1. Formazione e supporto: coordinare e fornire opportunità di sviluppo professionale sia nella formazione iniziale, sia in quella in servizio dei docenti;
2. Sviluppo e condivisione: sviluppare e condividere le risorse di seminari e materiali didattici, incrementare ed estendere continuamente il software matematico dinamico GeoGebra;
3. Ricerca e collaborazione: condurre e sostenere ricerche relative a GeoGebra con l'attenzione all'insegnamento e all'apprendimento della matematica, informare ed incrementare le attività di formazione e sviluppo, promuovere la collaborazione tra l'IGI e gli Istituti locali di GeoGebra, ed infine tra colleghi di diversi Paesi.

Il GeoGebra Institute di Torino, per la condivisione e la diffusione di informazioni e materiali, utilizza, oltre agli spazi ufficiali di GeoGebra, anche i seguenti:

- la piattaforma DI.FI.MA. in rete (DIdattica della FIsica e della Matematica: http://difima.i-learn.unito.it/);
- la piattaforma de La Casa degli Insegnantiper i docenti che partecipano ai progetti di formazione e sperimentazione (http://lacasadegliinsegnanti.wizshelf.org/).

Inoltre collabora con:

- l'Istituto di GeoGebra Internazionale di Linz per la ricerca didattica;
- la Provincia di Torino per la formazione insegnanti;
- il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino per la gestione della piattaforma DI.FI.MA. in rete;
- varie scuole del territorio piemontese per la sperimentazione di attività.

L'attività dell'Istituto di GeoGebra di Torino si colloca in continuità con le esperienze passate di formazione docenti in matematica (e in fisica):

- dal 2003 il Convegno DI.FI.MA.;
- dal 2004 il Piano nazionale Lauree Scientifiche (PLS);
- dal 2008 la piattaforma DI.FI.MA. in rete e tutte le sue iniziative di seminari, incontri e produzione di materiali;
- dal 2010 i corsi di formazione dei docenti di matematica (Progetto "Comunità di pratica Geogebra", a cura della Casa degli Insegnanti con il CESEDI).

4. Il Piano nazionale Lauree Scientifiche

Il "Progetto Lauree Scientifiche" (PLS) nasce nel 2004 dalla collaborazione del Ministero dell'Università e dell'Istruzione, della Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologie (Con.Scienze) e di Confindustria, con l'obiettivo iniziale di incrementare le iscrizioni ai corsi di laurea in Chimica, Fisica, Matematica e Scienze dei Materiali.

Nella sua prima attuazione (quadriennio 2005-2008) si è occupato principalmente di coinvolgere gli studenti della Scuola Secondaria di II grado in attività di laboratorio per migliorare la conoscenza e la percezione delle discipline scientifiche, di costruire un percorso virtuoso di formazione e sviluppo professionale dei docenti in servizio basato sulla collaborazione tra scuola e università, e di favorire il contatto e la collaborazione anche tra Scuola-Università-Mondo del Lavoro.

Il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, visti i risultati positivi raggiunti nella prima attuazione del Progetto, ha rilanciato il PLS, trasformandolo nel "Piano nazionale Lauree Scientifiche" nel 2009 con l'obiettivo principale di mettere a sistema le buone pratiche e le sperimentazioni attuate, e programmare nuove azioni in grado di rafforzare i legami Scuola-Università da un lato, e Università-Mondo del Lavoro dall'altro.

Il nuovo "Piano nazionale Lauree Scientifiche", come si evince dalla linee guida (MIUR, 2010) mantiene le finalità di quello che lo ha preceduto, in particolare si concentra su due filoni: l'orientamento degli studenti da un lato e la formazione dei docenti dall'altro.

Le azioni del PLS riguardano dunque in primo luogo l'orientamento degli studenti, pensato come un'attività in cui lo studente non sia soggetto che subisce passivamente, ma si confronti in prima persona con temi, problemi, metodologie e idee propri delle discipline scientifiche. In secondo luogo riguardano la formazione degli insegnanti, pensata come attività in cui gli insegnanti siano protagonisti, vengano coinvolti in esperienze a partire da problemi concreti, e arricchiscano la propria professionalità attraverso il confronto con i colleghi e con gli esperti.

La realizzazione di laboratori, organizzati dalle Università e rivolti ai docenti della Scuola, che prevedono la sperimentazione in classe di quanto progettato, fonde insieme le due finalità del PLS. Le attività implementate all'interno del PLS sono dunque inserite nel processo di innovazione dei curricola e delle metodologie didattiche adottate nelle scuole, ma anche nel processo di formazioni degli insegnanti (iniziale o in servizio).

Il polo Piemontese partecipa al PLS sin dalla sua nascita nel 2005, riscontrando una buona partecipazione degli insegnanti e delle Scuole e una ricaduta positiva sugli studenti. In questi anni si è infatti assistito a un incremento considerevole delle immatricolazioni ai corsi di laurea scientifici. Questo rappresenta un buon punto di partenza per incoraggiarci a lavorare ancora in questa direzione.

Le attività proposte coinvolgono entrambi i filoni del PLS; da un lato attività rivolte agli studenti (gare matematiche e laboratorio di approfondimento per le eccellenze), dall'altro o sviluppo professionale degli insegnanti (moduli di formazione che prevedono una sperimentazione in classe).

La scelta dei temi da affrontare nei moduli di formazione si è orientata maggiormente all'integrazione delle attività nel curricolo, fornendo la possibilità agli insegnanti coinvolti di co-progettare le attività da svolgere in classe, con il supporto degli esperti. Nel presente anno (2013-2014), sono stati proposti sei moduli di formazione afferenti a differenti nuclei concettuali e contenuti (statistica, geometria sintetica, successioni, funzioni, storia della matematica), ma uniti dall'idea di modello e di rappresentazione dinamica, anche attraverso l'uso delle tecnologie (GeoGebra per esempio).

5. Questo volume

Questo volume nasce come realizzazione di un progetto di formazione insegnanti con l'utilizzo di GeoGebra, nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche di Matematica coordinato dalla sottoscritta nell'anno 2012-13 ed è il terzo che scaturisce dalle iniziative PLS, dopo i volumi "Esplorazioni matematiche con GeoGebra" (Accomazzo, Beltramino & Sargenti, 2013) e "Gare e giochi matematici: studenti all'opera (Bibbona, Boggiatto, Carypis, De Simone & Panero, 2014). Abbiamo attivato sul territorio piemontese alcuni interventi di formazione insegnanti che prevedevano non solo attività in presenza con i formatori, ma sperimentazione nelle classi e osservazione della sperimentazione. Parte integrante del piano era il lavoro a distanza in comunità, tramite piattaforma Moodle DIFIMA in rete.

In continuità con il primo volume (Accomazzo, Beltramino & Sargenti, 2013), i contenuti proposti sono basati su un approccio laboratoriale alla matematica, in particolare alla geometria, con l'utilizzo di GeoGebra.

Questo volume non raccoglie solamente quanto proposto nei corsi di formazione del PLS, ma è il risultato di un'esperienza più che ventennale di lavori di ricerca e di didattica del gruppo di ricercatori e insegnanti che operano a Torino. Si colloca quindi nella tradizione di insegnamento prima di tutto della matematica, quindi della matematica con le tecnologie (quelle che si mostrano essere efficaci nella mediazione dell'apprendimento dei concetti, della costruzione dei significati, del supporto fornito nella congettura e nell'argomentazione).

Nel volume dunque convergono competenze degli autori ma anche dei docenti impegnati a seguire i corsi, a sperimentare, a osservare gli studenti mentre affrontano le attività.

Per questo si può dire che il volume non è solo il frutto dell'esperienza nei corsi di formazione dei docenti attivati nell'ambito del progetto Lauree Scientifiche che ha operato in sinergia con l'Istituto di GeoGebra, ma di tutte le competenze acquisite nel tempo con i progetti UMI La matematica per il cittadino, o il piano m@t.abel, il piano PON, i convegni DIFIMA, i corsi de La Casa degli Insegnanti, i precedenti progetti Lauree Scientifiche, il progetto SeT nazionale, le esperienze maturate con l'INVALSI.

ESPLORAZIONI MATEMATICHE CON GEOGEBRA II

Pierangela Accomazzo[2,3], ***Silvia Beltramino***[3,4], ***Ada Sargenti***[1,2]

[1]*GeoGebra Institute di Torino,* [2]*La Casa degli Insegnanti,* [3]*m@t.abel*
[4]*Liceo Scientifico Curie di Pinerolo*

> *"È necessario ricorrere all'oggetto e all'azione se si vuole che l'insegnamento della geometria intuitiva abbia un carattere costruttivo e che sia quindi formativo […].*
>
> *Oggetto e azione che non devono seguire uno schema prestabilito, ma lasciarsi ispirare ogni volta dalle esigenze della classe che l'insegnante avrà la sensibilità di saper cogliere […].*
>
> *I mezzi pratici per la realizzazione delle esperienze non hanno nessuna importanza: si tratterà di un modello, di un dispositivo, di un'esperienza realizzata con l'aiuto di un materiale o solamente immaginata, delle variazioni di una luce o del mutarsi di un'ombra.*
>
> *Ed è proprio forse questa libertà di ideare e di interpretare, ugualmente alla portata del maestro e dell'allievo, che costituisce una delle caratteristiche del metodo costruttivo"*
>
> *Emma Castelnuovo, "Il materiale per l'insegnamento della matematica", 1965, pag 65*

Questo volume è la naturale prosecuzione del lavoro iniziato lo scorso anno con "Esplorazioni matematiche con GeoGebra".

Come nel volume precedente, le proposte di lavoro sono inquadrate nelle Indicazioni nazionali e nelle Linee guida ministeriali, nelle proposte UMI-CIIM[1] e in altri progetti di rilevanza nazionale, tra cui m@t.abel[2].

Sono inoltre segnalati quegli aspetti del software che la ricerca didattica, nazionale ed internazionale, hanno individuato come valore aggiunto nella costruzione della conoscenza matematica.

Anche in questo volume i materiali presentati provengono in buona parte dai progetti *Lauree scientifiche* e *Comunità di pratica con il software GeoGebra*[3]. Le attività proposte sono pensate prevalentemente per classi di scuola secondaria di II grado, con una maggiore attenzione al secondo biennio. Si tenga tuttavia presente che l'uso di un software dinamico può modificare la scansione tradizionale di temi e concetti matematici, permettendo di anticipare lo studio di alcuni argomenti senza necessariamente richiedere il possesso di specifici prerequisiti matematici. È possibile, ad esempio, analizzare caratteristiche di funzioni anche senza gli strumenti dell'analisi ricorrendo alle rappresentazioni grafiche tipiche di un software come GeoGebra.

[1] Sul sito www.umi-ciim.it e in particolare nella sezione materiali: http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

[2] Le attività m@t.abel sono reperibili sul sito www.risorsedocentipon.indire.it

[3] Progetto che dall'a.s. 2010-11 è stato inserito nel catalogo CE.SE.DI. (CEntro SErvizi DIdattici) della Provincia di Torino (*http://www.provincia.torino.gov.it/istruzione/cesedi*) che lo ha sovvenzionato. La realizzazione del progetto è avvenuta attraverso l'Associazione La Casa degli Insegnanti (*www.lacasadegliinsegnanti.it*), che è partner del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino nel GeoGebra Institute di Torino.

L'obiettivo di queste pagine è quello di suggerire un uso del software GeoGebra che sia funzionale ad un apprendimento sensato della Matematica e spendibile nella didattica quotidiana. Per questo motivo i materiali sono stati selezionati in base alla loro validità e ricchezza didattica e sono articolati in modo da affrontare i principali nodi concettuali presenti nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica, come esplicitato in ogni capitolo. Sicuramente queste pagine non esauriscono i temi fondamentali e non comprendono tutte le proposte realizzate in questi anni nei progetti indicati in precedenza, ancorché valide.

I principali nodi concettuali affrontati in questo secondo volume sono:

1. Le coniche come luoghi
2. Modelli e funzioni
3. Operatori e funzioni
4. Congetture e dimostrazioni
5. Problemi e modelli

Ogni tema è sviluppato in uno o più capitoli.

Ciascun capitolo inizia con una sintesi degli argomenti in esso trattati (matematici e di GeoGebra). Per gli aspetti matematici vengono richiamati i riferimenti alle indicazioni ministeriali e sono fornite tracce per l'inserimento delle attività nel curriculum, senza tralasciare un'attenzione alla ricaduta sulle competenze. Inoltre sono indicati i principali nodi concettuali che caratterizzano le attività del capitolo.

Ciascuna proposta è corredata da materiali per l'uso didattico: schede (per il docente e per lo studente), videate della realizzazione software, indicazioni metodologiche.

Le schede per lo studente sono meno dettagliate nelle indicazioni tecniche riguardanti il software di quelle predisposte per il volume precedente: si presuppone che gli allievi abbiamo già acquisito una conoscenza di base e una certa dimestichezza con GeoGebra.

Infatti, a differenza del primo volume, le indicazioni tecniche sono presenti solo là dove sono necessarie per rendere leggibili e riproducibili le proposte di lavoro. Volendo approfondire gli aspetti del software si rimanda al manuale e ai tutorial che si trova sul sito di GeoGebra (*http://www.geogebra.org*).[1]

Al fondo del testo è stata inserita una bibliografia-sitografia, per approfondimenti sia riguardanti gli aspetti della ricerca didattica matematica, sia per quanto concerne l'uso delle tecnologie nella didattica, sia per la normativa ed i progetti ministeriali.

[1] Il software GeoGebra viene costantemente aggiornato. Pertanto è possibile che alcuni comandi o strumenti indicati nel volume vengano modificati nei nomi o nella sintassi in aggiornamenti successivi alla stampa del volume stesso.

CAPITOLO 1

A SPASSO PER IL PIANO: INSIEMI DI PUNTI E LUOGHI GEOMETRICI
LE CONICHE

Introduzione

Nello studio della geometria accade spesso che prevalga l'aspetto analitico delle figure a scapito di quello sintetico. Con GeoGebra è possibile recuperare anche tale aspetto grazie alla facilità nel tracciare i luoghi di punti: la *Traccia* infatti appare come una naturale conseguenza della dinamicità del software e la possibilità di lavorare con il comando *Luogo* ci riporta senza salti cognitivi all'aspetto sintetico.

La proposta didattica è di introdurre le curve come luoghi di punti iniziando dalle rette. In questo capitolo ci soffermeremo in particolare sulle coniche: il fatto di presentarle come luoghi geometrici consente di mostrare agli studenti ciò che le accomuna. È bene non presentare le curve come entità tra loro indipendenti.

Le attività seguenti introducono i luoghi geometrici, partendo dalla ricerca dei singoli punti. In tutte le proposte è dato ampio spazio alla piegatura della carta, alla ricerca dei punti con riga e compasso, oltre che alla ricerca mediata da GeoGebra. Inizialmente GeoGebra è utilizzato come strumento statico, per comprendere a fondo le proprietà dei singoli punti e solo dopo si sfrutta il suo aspetto dinamico, attivando congetture e verifiche che nascono spontanee.

Gli ambienti di lavoro di GeoGebra permettono agli studenti di operare una sintesi tra il metodo analitico e quello della geometria sintetica.

Volutamente è stata tralasciata la circonferenza perché tra le coniche è quella più familiare agli studenti, in essa il legame tra l'aspetto analitico e sintetico è comunque forte e la costruzione come luogo geometrico è facilmente individuabile.

I nodi concettuali che verranno qui affrontati riguardano:

- passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico e algebrico;
- costruzioni geometriche, congettura, argomentazione, dimostrazione;
- proprietà locali e globali di un luogo di punti, in particolare delle coniche.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, […] Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici. (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*).

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Le coniche: definizioni come luoghi geometrici e loro rappresentazione nel piano cartesiano. (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*).

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Luogo	

Strumenti	*Icone*
Inserisci testo	

Comandi GeoGebra con inserimento nella barra apposita

EquazioneLuogo[Luogo]	Da digitare direttamente nella barra di inserimento.
EquazioneLuogo[Punto Q che genera la curva luogo, Punto P]	

OSSERVAZIONE 1: a differenza dell'opzione *Traccia*, il comando *Luogo* delega a GeoGebra la creazione automatica della curva luogo di punti e sul luogo così creato è possibile selezionare un punto. Il comando si può attivare sia selezionando lo strumento *Luogo* con il mouse, sia digitando il comando *Luogo* nella Barra di inserimento. Con la versione attuale di GeoGebra è anche possibile ricavare l'equazione implicita del luogo geometrico; infatti il comando *EquazioneLuogo[Luogo]* calcola l'equazione di un luogo come curva implicita e ne traccia il grafico a patto che il luogo sia generato da un punto libero e non da uno *slider*. Funziona in modo analogo il comando *EquazioneLuogo[Punto Q che genera la curva luogo, Punto P]* dove Q è il punto generatore e P il punto in movimento.

Tale comando è però applicabile esclusivamente a un insieme ristretto di luoghi geometrici, dipendenti da punti, rette, circonferenze, coniche. Se il luogo è troppo complicato il comando restituisce '*non definito*' e in alcuni casi possono essere generati rami di curva non appartenenti al luogo.

OSSERVAZIONE 2: con lo strumento *Inserisci testo* è possibile creare nella Vista grafica testo statico e dinamico.

Se, dopo aver selezionato il comando, si fa click su un punto il nuovo testo creato è vincolato a tale punto. Dalla scheda *Fondamentali* della finestra di dialogo *Proprietà* è possibile specificare la posizione del testo: assoluta sullo schermo o relativa al sistema di coordinate.

Dopo averne specificata la posizione, si visualizza una finestra di *dialogo* che consente l'inserimento del testo. Il testo digitato nel campo *Modifica* viene considerato da GeoGebra come statico, cioè non subisce modifiche correlate alla posizione o alle definizioni degli oggetti. Per creare un testo dinamico, in grado di visualizzare i diversi valori assunti da un oggetto, selezionare l'oggetto dall'elenco a discesa *Oggetti*: il nome dell'oggetto corrispondente verrà visualizzato, racchiuso in un rettangolo grigio, nel campo *Modifica*, e il relativo valore sarà visualizzato nel campo *Anteprima*.

È inoltre possibile applicare operazioni algebriche o comandi specifici agli oggetti dinamici, facendo clic nel rettangolo grigio e digitando l'operazione algebrica o il comando testo desiderato. Il risultato sarà visualizzato nel testo finale, nella Vista Grafica.[1]

1. La parabola[2]

In questa attività la parabola viene definita come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Come in tutte le attività qui proposte c'è una parte iniziale di manipolazione e di esplorazione con carta e matita. Tale fase è indispensabile per permettere allo studente di far proprio il concetto di luogo attraverso la ricerca di ogni singolo punto.

Solo in un secondo tempo si avvia la ricerca dei punti con la mediazione dello strumento informatico; proprio per consentire il passaggio dalla manipolazione su carta a quella con GeoGebra inizialmente si propone un utilizzo "statico" del software per poi passare all'aspetto dinamico. Si può proporre agli studenti di costruire la parabola a partire dal vertice e dal fuoco, oppure dal vertice e dalla direttrice.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** spazio e figure.
- **Obiettivi**: introdurre la parabola come luogo di punti.
- **Ordine di scuola**:
  - primo o secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività:**

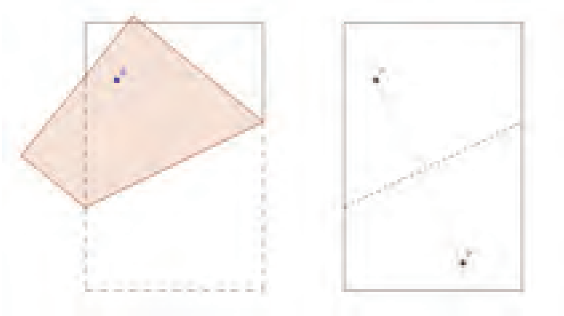
  L'attività è suddivisa in più parti.
  - Si costruisce la parabola piegando la carta, partendo dal fuoco e dal vertice o dal fuoco e direttrice. Questa fase è descritta nell'Attività 1.
  - Si analizza la costruzione effettuata con la piegatura della carta, con l'aiuto di GeoGebra: prima si propone agli studenti una rappresentazione statica (Attività 2) di quanto ottenuto con la carta, per poi passare all'aspetto dinamico del software con l'opzione Traccia.
  - Con l'Attività 3 si arriva a determinare l'equazione della parabola.
- **Indicazioni metodologiche**:

  Nel rispetto delle Indicazioni nazionali, in cui si chiede di studiare le sezioni coniche sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico, è importante che il docente guidi alla comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria. La prima attività impegna i ragazzi nella piegatura della carta al fine di costruire una parabola per punti noti il fuoco e la direttrice. Con tale costruzione si pone l'attenzione sui punti della parabola e non sul suo inviluppo.

[1] Da http://wiki.geogebra.org/it/Finestra_di_dialogo_Propriet%C3%A0

[2] Schede di S. Beltramino liberamente tratte dalla presentazione di O. Robutti "La professionalità docente e l'uso di GeoGebra" tenutasi a Torino il 23 gennaio 2013.

I prerequisiti dell'Attività 1 sono minimi; si dovrebbe far notare agli studenti che una piega in un foglio è sempre una retta[3], corrispondente all'asse del segmento tra i due punti P e P': piegando il foglio esso si sovrappone su se stesso, quindi ogni punto P combacia con un altro punto P', il simmetrico di P rispetto alla piega visto che il foglio non si dilata.



Oltre a consegnare la scheda dell'Attività 1, l'insegnante può fornire le indicazioni per la piegatura della carta a voce mostrando con un esempio come si ricavano i punti.

L'Attività 2 propone due differenti utilizzi di GeoGebra: inizialmente utilizzato in modo statico, il software non aiuta solo ad "avere un bel disegno", infatti è proprio tramite tale costruzione che gli studenti riescono a comprendere quali relazioni esistono tra i vari punti e le rette (pieghe) che via via si sono tracciate. Si definisce la parabola come luogo di punti solo dopo averla costruita con la piegatura della carta e con GeoGebra.

Solo in seguito la scheda propone agli studenti di rendere dinamica la costruzione per rappresentare il luogo geometrico prima come traccia e poi come luogo vero e proprio; in questo modo lo studente utilizzerà uno strumento in cui sono chiare le relazioni tra i vari oggetti.

Nell'Attività 3 si chiede agli studenti di visualizzare le rotazioni che portano gli assi delle parabole paralleli agli assi cartesiani e l'equazione generatrice della parabola. Lo scopo è quello di giungere all'equazione del luogo. In questo caso è preferibile che l'insegnante lavori con una lezione dialogata sul file costruito dai ragazzi, magari con il supporto di una LIM o di un videoproiettore: può essere utile mostrare agli studenti l'equazione del luogo prima di calcolarla algebricamente. Anche il calcolo algebrico può essere preceduto dal calcolo con l'ausilio del software: se il luogo di punti è costruito partendo da una retta ed un punto entrambi liberi, non vincolati, allora si può chiedere con il comando *EquazioneLuogo[Luogo]* di scrivere l'equazione del luogo in forma implicita. Modificando la direttrice in modo che risulti essere parallela all'asse delle ascisse e ponendo il vertice sull'origine degli assi, si può facilmente individuare l'equazione nella forma $x^2 - ay = 0$.

- **Tempi**:
  - 3 ore complessive.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Per le Attività sono riportate le videate relative.

[3] Per ulteriori approfondimenti:
- B. SCIMEMI, Algebra e geometria piegando la carta, http://www.filippin.it/morin/attivita/supermath2010/scimemi.pdf
- BEUTELSPACHER, M. WAGNER, Piega e spiega la matematica. Laboratorio di giochi matematici, (2009) Ed Ponte alle Grazie
- L. RESTA, S. GAUDENZI, S. ALBERGHI, Matebilandia. Laboratorio di matematica e modellazione in un parco divertimenti, (2011) Ed. Springer Verlag, collana Convergenze.

Scheda per lo studente Attività 1

Prendi un foglio bianco, segna su di esso un punto F e una piega *t* che non passa per il punto. Ora segui le indicazioni nell'ordine:

1. Segna un punto A_1 sulla retta *t*.
2. Traccia la piega passante per F e A_1; apri il foglio.
3. Porta a far combaciare il punto F con A_1 e segna la piega *s* che si genera; apri il foglio.
4. Piega il foglio in modo che la retta *t* venga ripiegata su se stessa proprio nel punto A_1: la piega *r* così trovata in quale relazione è con *t* ? Perché?
5. Segna con P_1 il punto in comune con la piega *r* e la piega *s*.
6. Ripeti lo stesso procedimento partendo da un altro punto A_2 sulla retta *t* per individuare il punto P_2 e via di seguito …

Fai in modo di aver segnato almeno 5 punti. Ora prova a unirli, cosa ottieni? Perché? Scrivi quello che hai pensato, motivando le tue risposte.

Scheda per lo studente Attività 2

Apri GeoGebra. Riprendi la scheda di prima e prova a individuare i punti F, A_1 e P_1 sulla finestra Vista Grafica, senza visualizzare gli assi. Quali sono le relazioni tra questi punti?

Scrivi le tue osservazioni.

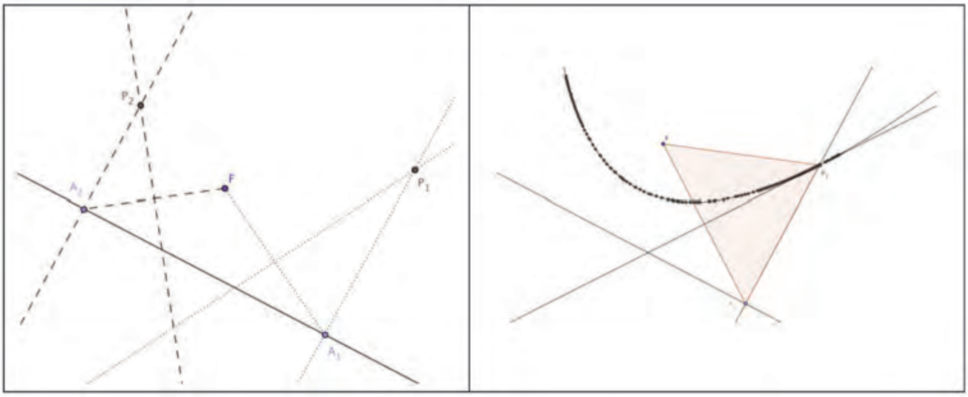
Rappresenta ora un altro punto P_2. Le relazioni tra i punti continuano a mantenersi? Perché?

Prova ora a rappresentare altri 3 punti P_3, P_4 e P_5. Cosa osservi?

Rendi attiva la traccia del punto P_1 e muovi il punto A_1: quale curva visualizzi? Cosa ottieni? Trovi della analogie con la curva che hai disegnato sul foglio nell'attività precedente?

Se ti aiuta, rappresenta il triangolo FA_1P_1 e fai variare la posizione di A_1 sulla retta.

Salva il tuo lavoro con il nome *attivita2.ggb* e chiudi GeoGebra.



Videate Attività 2

Scheda per lo studente/docente Attività 3

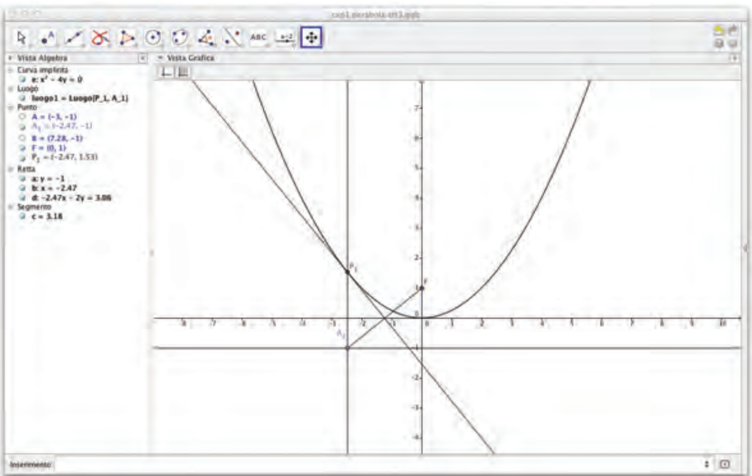

Apri il file *attivita2.ggb*. Visualizza gli assi cartesiani.

Con il comando Luogo rappresenta il luogo generato dal punto P_1 al variare di A_1: si tratta della parabola con il fuoco in F e la direttice in *t*.

Scrivi nella Barra di inserimento il comando *Equazione Luogo[P_1, A_1]*: nella Vista Algebra comparirà l'equazione del luogo in forma implicita.

Spostando fuoco e direttrice prova a posizionare il vertice sull'origine degli assi e la direttrice parallela all'asse delle ascisse: qual è l'equazione? Perché?

Salva il tuo lavoro e chiudi GeoGebra.



Videata Attività 3

2. Introduzione all'ellisse e all'iperbole[4]

In continuità con quanto detto per la parabola, anche l'ellisse e l'iperbole sono presentate come luogo di punti, da costruire inizialmente punto per punto. Le attività procedono per fasi e prevedono una prima fase esplorativa con un problema da risolvere con carta e matita per poi passare all'uso del software per verificare le supposizioni avanzate precedentemente dagli allievi.

Le attività sono presentate insieme per cogliere il nesso che lega tra loro le coniche, mostrando non solo le differenze, ma anche le analogie.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** spazio e figure.
- **Obiettivi:**
  - Introdurre l'ellisse come luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi.
  - Introdurre l'iperbole come luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi.
  - Studio di alcune proprietà delle coniche.
- **Ordine di scuola:**
  - scuola secondaria di II grado, secondo biennio.
- **Descrizione attività:**

  Per entrambe le curve si parte da situazioni problematiche reali che conducono alla costruzione per punti delle curve. L'uso del software viene proposto in un secondo tempo.
- **Indicazioni metodologiche**:

  Gli studenti possono lavorare a coppie o a piccoli gruppi durante tutte le attività. Sarebbe opportuno che i gruppi fossero tendenzialmente omogenei. Nella fase esplorativa (Attività 1 e 4), il docente deve assumere il ruolo di osservatore senza fare alcun intervento: i suoi commenti potrebbero, infatti, bloccare o deviare le ipotesi degli allievi per via del contratto didattico. Al termine delle attività con GeoGebra il ruolo del docente cambia: tocca a lui gestire una lezione dialogata nella quale, partendo dalle osservazioni degli allievi, si giunge alle definizioni di ellisse e di iperbole.

Come già detto, l'esplorazione avviene prima con un problema da risolvere con carta e matita e poi con l'ausilio di GeoGebra. Il software è espressamente utilizzato per verificare le ipotesi avanzate nella fase precedente o, eventualmente, per esplorare nuove regolarità e proprietà, ma solo dopo che lo studente ha affrontato il problema con carta e matita.

Le attività sono pensate per introdurre le due coniche, quindi non è necessario che gli allievi le conoscano, ma essi devono aver dimestichezza con il concetto di distanza tra due punti, il concetto di luogo di punti e un minimo di famigliarità con i comandi di GeoGebra.

[4] Schede di P. Eandi che saranno pubblicate negli Atti del VI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2013.

Durante la lezione dialogata conclusiva, il docente deve giungere alla definizione dell'ellisse e dell'iperbole partendo dai lavori dei ragazzi, inoltre deve mostrare alcune proprietà caratteristiche delle coniche: la simmetria, la relazione tra la distanza focale e la somma (o la differenza) delle distanze dei punti dai fuochi, la relazione tra le coniche e i parametri presenti nell' equazione, …

Nelle Attività 2 e 5 si prevede che il docente consegni un file agli studenti: *disegno.giardino.ggb* e *disegno.esplosione.ggb*. Per la preparazione si vedano i suggerimenti della Nota tecnica.

Si sottolinea che non è necessario riportare le definizioni delle coniche nelle schede delle Attività 3 e 5, come è proposto qui.

- **Tempi**:
  - 6 ore, compresa la discussione.
- **Note tecniche**:

Per costruire il file da consegnare agli studenti nella Attività 2 e nella Attività 3 si inseriscono due numeri tramite la Barra di Inserimento: casa e recinto per la prima attività e distanza e esplosione per la seconda.

In seguito si creano due *Campi di inserimento* riferiti rispettivamente ai numeri appena definiti e con il comando *Segmento – lunghezza fissata*, si disegnano due segmenti di lunghezza casa e recinto.

Il punto E è rappresentato come Punto su segmento.

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5.

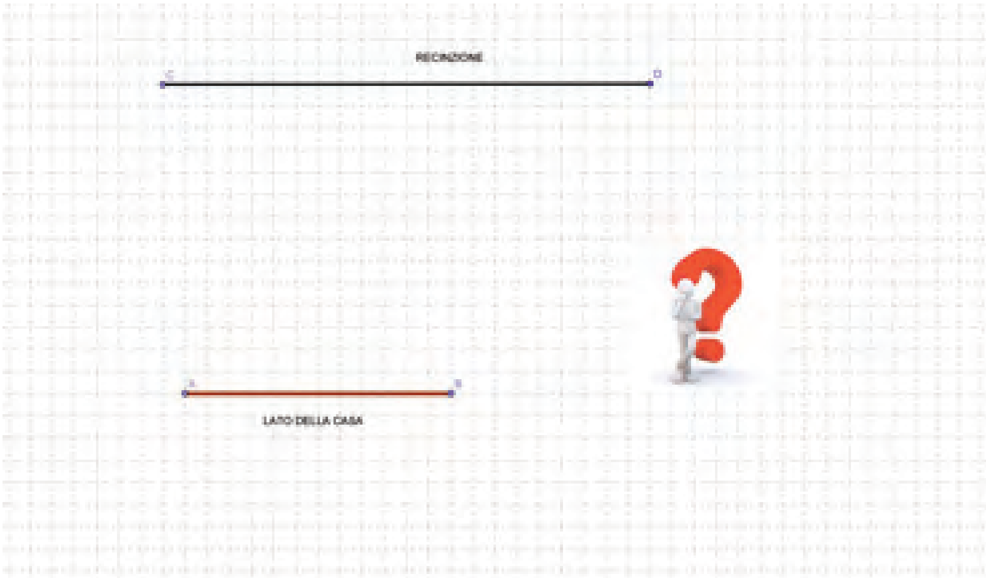
Per le Attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Problema. Il proprietario di una casa vuole creare un piccolo giardino triangolare, avente come base un lato della casa, e il terzo vertice in una posizione a sua scelta. Il lato della casa misura 12 metri. Egli ha a disposizione 22 metri di recinzione. Dove può fissare il terzo vertice del suo giardino?

Quale posizione gli assicurerà la superficie maggiore?

Per risolvere il problema, prova prima a trovare qualche soluzione sul disegno qui sotto, con riga e compasso.

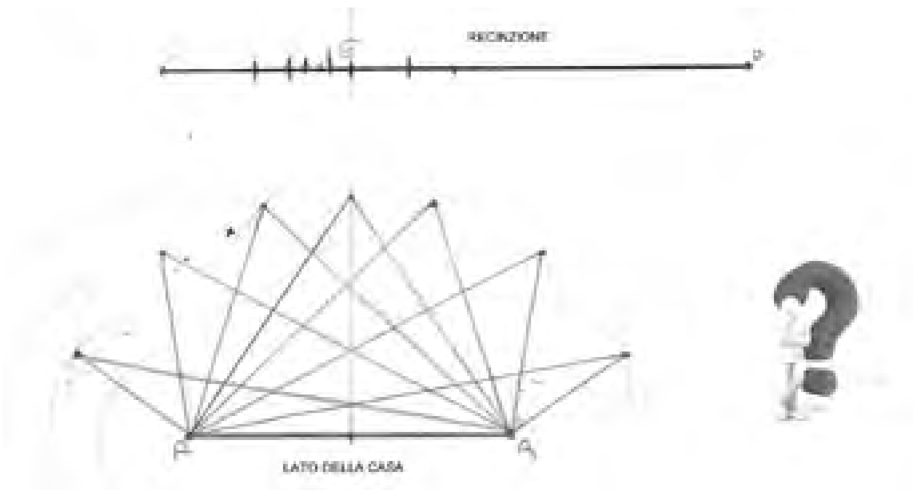


Illustra nel dettaglio il procedimento che usi per la costruzione dei punti cercati.

Dove si trovano i punti? Quante possibilità ci sono?

Riesci ad esplicitare la proprietà che individua la posizione dei vari punti?

Riesci a vedere posizioni particolari? Riesci ad immaginare dove si trovano tutti i punti possibili?



Esempio protocollo Attività 1[5]

[5] I protocolli sono stati forniti dalla professoressa P. Eandi e si riferiscono ad una classe terza liceo scientifico, opzione Scienze Applicate dell'I.I.S. G. Peano di Torino.

Scheda per lo studente Attività 2

Per verificare le tue supposizioni prova ora ad aprire il file *disegno.giardino.ggb* di GeoGebra, nel quale è riprodotto il disegno della scheda precedente. Prova a ripetere sul file la costruzione fatta a mano (ricorda l'uso dello strumento *Circonferenza - dati centro e raggio*).

Tieni presente che il punto E sul segmento CD determina automaticamente la lunghezza dei due lati del triangolo da costruire.

Prova a fare variare la posizione di E e usa la modalità *Traccia* sul punto che individua il vertice del triangolo cercato; studia come varia la sua posizione al variare della lunghezza dei due lati.

Trovi conferma alle tue ipotesi?

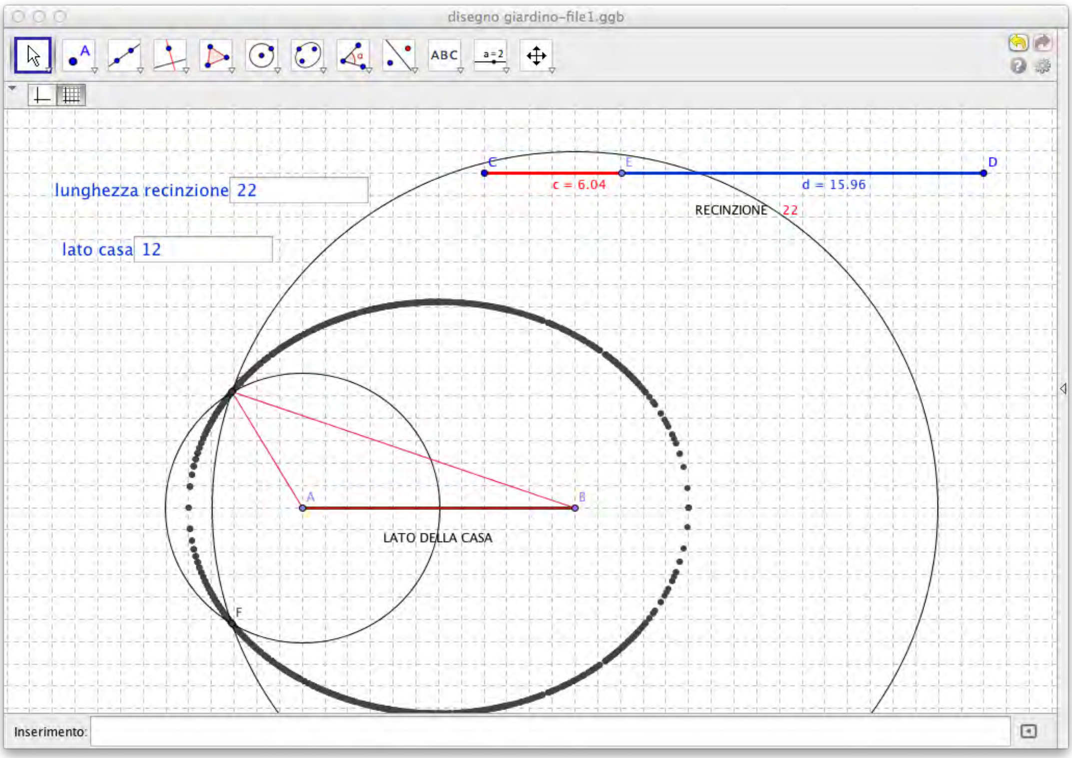
Ci sono posizioni del punto E che non permettono di disegnare il triangolo? Come te lo spieghi?

Ci sono posizioni-limite? Quali?

Noti delle simmetrie? In quale parte di piano sono contenuti i punti?

Cosa succede quando E corrisponde al punto medio del segmento CD?

Riconosci, nella traccia di E, una curva già nota?



Videata Attività 2

Scheda per lo studente – Attività 3

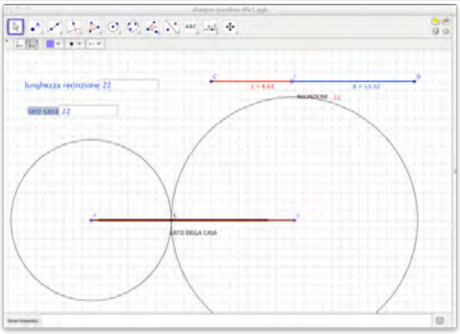
Prova ora a variare la lunghezza della recinzione nel campo di inserimento.

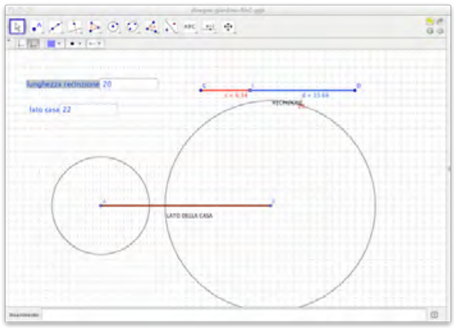
Cosa noti? Come si modifica la curva su cui si trovano i vertici?

Esistono casi in cui la costruzione non è possibile? Sapresti spiegare perché?

Prova anche a variare la misura del lato della casa, mantenendo fissa la recinzione. Osserva cosa succede. Annota le tue osservazioni.

La curva generata dai vertici dei triangoli si chiama ellisse, e viene definita proprio come il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.





Videate Attività 3

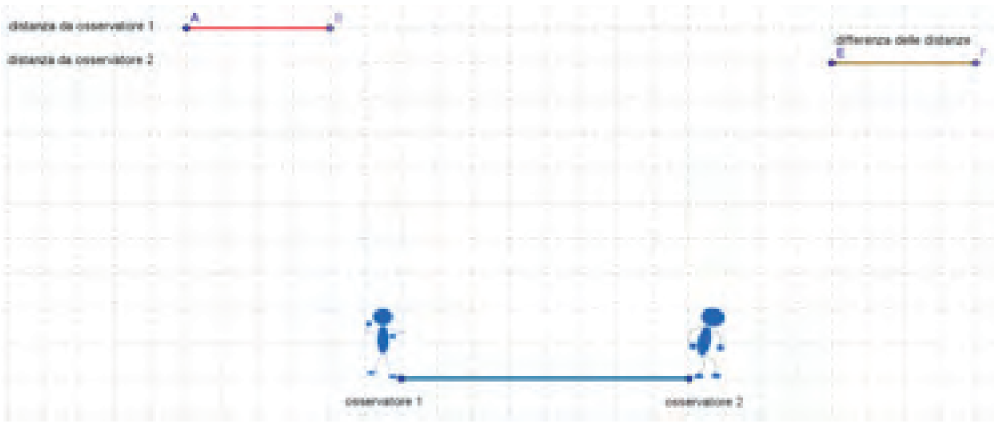
Scheda per lo studente Attività 4

Problema. In un punto S di un certo territorio avviene un'esplosione. Due osservatori O_1 e O_2 sono posti l'uno dall'altro a una distanza nota. L'osservatore O_2 sente l'esplosione 1 secondo dopo l'osservatore O_1.

Come saprai il suono viaggia nell'aria alla velocità di circa 342 m/s: quindi il punto S in cui avviene l'esplosione si trova 342 metri più vicino all'osservatore 1 rispetto all'osservatore 2. Dove può essere avvenuta l'esplosione? (Supponi per semplicità che tutto avvenga a livello del terreno, quindi considera un territorio piano).

Per risolvere il problema, prova prima a trovare qualche soluzione sul disegno qui sotto, con riga e compasso.

Ricorda che AB rappresenta la distanza dell'osservatore 1 dall'esplosione.



Illustra dettagliatamente il procedimento che usi per trovare le posizioni possibili per l'esplosione.

Dove si trovano i punti? Quante possibilità ci sono?

Riesci ad esplicitare la proprietà che individua la posizione dei vari punti?

Riesci a vedere posizioni particolari?

Scheda per lo studente Attività 5

Per verificare le tue supposizioni prova ora ad aprire il file *disegno.esplosione.ggb* di GeoGebra, nel quale è riprodotto il disegno della scheda precedente. Prova a ripetere la costruzione fatta a mano.

Nel file trovi già impostata la distanza dell'esplosione dall'osservatore 2 come somma della distanza dall'osservatore 1 e della differenza delle distanze dei due osservatori dal punto di esplosione. Usa la stessa costruzione di prima per trovare il punto cercato.

Prova a fare variare la distanza dell'esplosione dall'osservatore 1 e usa la modalità *Traccia* per scoprire dove si trovano tutti i punti possibili.

Trovi conferma alle tue ipotesi?

Ci sono casi in cui non riesci a trovare il punto? Come te lo spieghi?

I punti cercati si trovano in una parte di piano limitata? Perché?

Prova ora a scambiare i ruoli dei due osservatori e fai sì che sia l'osservatore 1 a trovarsi più distante dell'osservatore 2 dall'esplosione. Dove si trovano i punti?

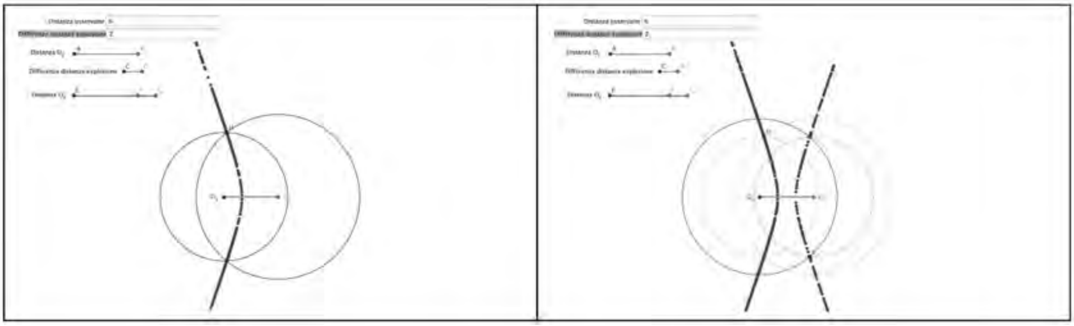
Ci sono delle simmetrie? Riconosci una curva nota?

Prova ora a variare la lunghezza della differenza delle distanze. Come varia la curva su cui si trovano le posizioni dell'esplosione?

Esistono casi in cui non è possibile la costruzione? Perché?

Modifica anche la distanza tra gli osservatori, mantenendo fissa la differenza delle distanze. Come varia la curva? Osserva e scrivi le tue considerazioni.

La curva generata dai vertici dei triangoli si chiama iperbole, e viene definita proprio come il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.



Videate Attività 5

3. Circonferenza, ellisse o iperbole?[6]

L'attività propone di partire dalla costruzione dell'ellisse con GeoGebra per aprire una finestra anche sulle altre coniche mostrandone il legame reciproco senza passare attraverso la sezione del cono.

Costruita l'ellisse come luogo geometrico di punti, si chiede di muovere uno dei suoi fuochi: il luogo si modifica in una circonferenza o in un'iperbole. Gli studenti vedranno trasformarsi sotto i propri occhi l'ellisse in un'altra curva.

In questo modo le coniche non dovrebbero più essere viste come entità totalmente differenti.

- **Nucleo:** spazio e figure.
- **Obiettivi:**
  - Mostrare un legame "visivo" tra ellisse, circonferenza e iperbole, con una semplice costruzione geometrica.

[6] Schede di S. Beltramino

- **Ordine di scuola:**
  - scuola secondaria di II grado, secondo biennio.
- **Descrizione attività:**

  L'Attività 1 prevede la costruzione di un ellisse come luogo di punti e la sua trasformazione a seconda della posizione degli oggetti da cui dipende il luogo stesso.

  L'Attività 2 è analoga a quella precedente, ma il punto di partenza è una situazione concreta: si costruisce un'ellisse piegando la carta, creando un inviluppo dell'ellisse stessa.
- **Indicazioni metodologiche**:

  Gli studenti lavorano a coppie. Sono previste domande stimolo che richiedono risposte scritte, in modo da rispettare i tempi di apprendimento di ciascun allievo.

  Gli interventi del docente devono essere mirati a far nascere negli alunni l'esigenza di dimostrare che ciò che vedono è effettivamente un'ellisse o un'iperbole. Solo al termine di una discussione collettiva ci sarà l'istituzionalizzazione delle conoscenze acquisite.

  È un modo interessante per mostrare il legame tra coniche diverse, in alternativa alla sezione del cono con piani di diverse inclinazioni. La parabola, avendo un fuoco all'infinito, non può essere presente.

  Inoltre le attività richiedono di utilizzare la definizione di ellisse per dimostrare che effettivamente i luoghi inizialmente costruiti sono delle ellissi; le dimostrazioni possono facilmente essere svolte attraverso la geometria sintetica.
- **Tempi:**
  - 4 ore, compresa la discussione.

 Schede per lo studente Attività 1, 2.

Per le Attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri un file GeoGebra e nascondi gli assi cartesiani nella Vista grafica. Costruisci una circonferenza *c* di centro O. Disegna un punto P interno alla circonferenza, diverso da O, ed un punto A sulla circonferenza. Costruisci la retta *r* che passa per il centro O e il punto A.

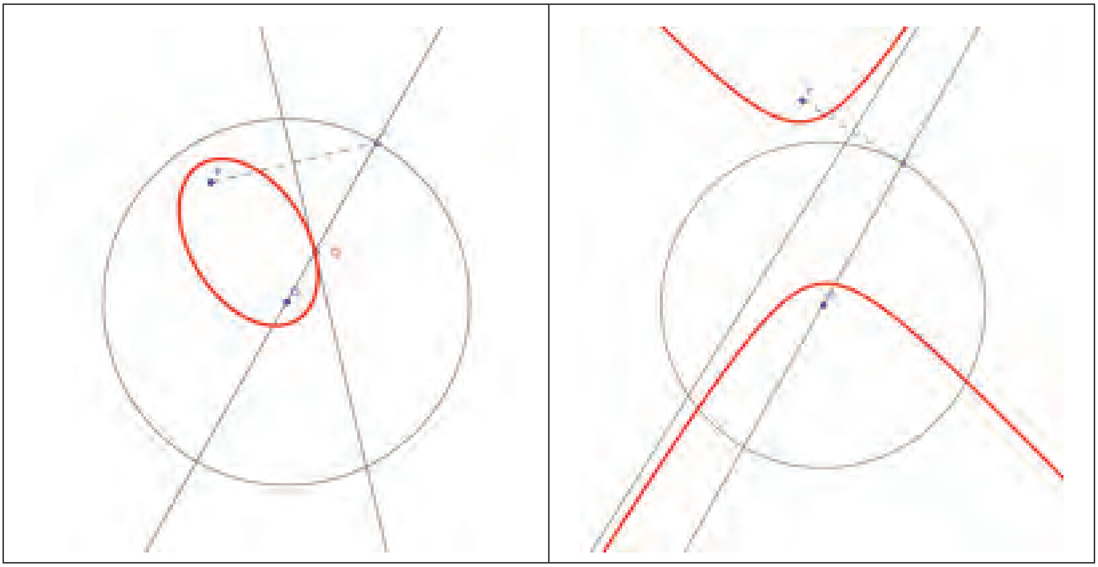
Chiama Q il punto dell'intersezione tra la retta *r* e l'asse del segmento AP.

Quale luogo descriverà il punto Q al variare di A sulla circonferenza?

Sapresti spiegare il perché?

Cosa succede se si modifica il raggio della circonferenza *c*?

E se si varia la distanza tra P ed O? In particolare controlla cosa succede quando P coincide con O, quando P varia internamente alla circonferenza e quando P è esterno alla circonferenza.



Videate Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2

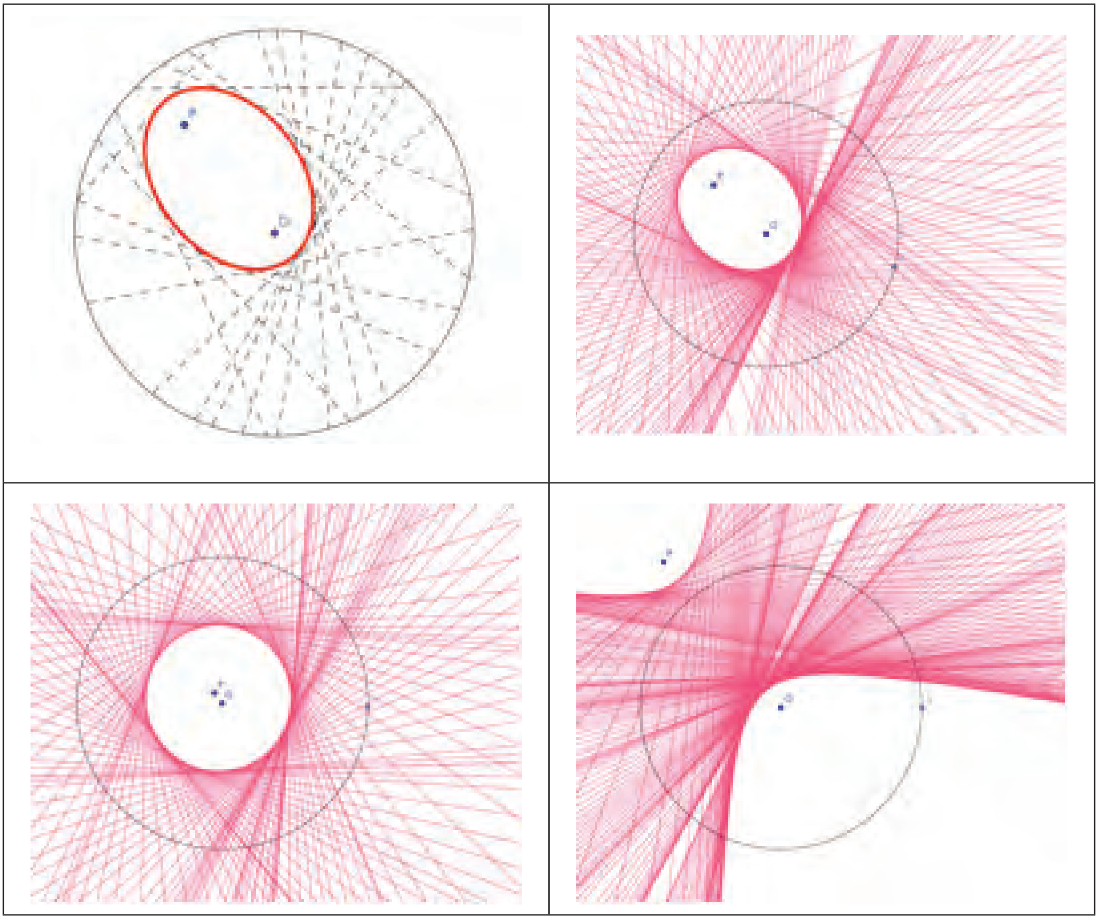
Su di un foglio di carta ritaglia un cerchio di centro O e raggio a piacere.

Segna un punto P, interno al cerchio e diverso dal centro O. Ora piega la carta in modo che ogni punto della circonferenza vada a coincidere con P. Cosa puoi notare?

Apri GeoGebra e ripeti la costruzione che hai eseguito con la piegatura della carta. Costruisci una circonferenza di centro O e raggio a piacere. Disegna un punto P interno al cerchio e individua un punto A sulla circonferenza. Costruisci l'asse del segmento PA (corrisponde a una piega della carta) e chiamalo *a*. Rendi attiva la traccia della retta *a* e sposta il punto A. Cosa osservi?

Prova a considerare cerchi con raggi differenti e a cambiare la posizione del punto P, cosa succede?

Motiva adeguatamente la tua risposta.



Videate Attività 2

CAPITOLO 2

Come varia un fenomeno: funzioni e modelli
Le funzioni esponenziali

Introduzione

In questo capitolo e nel successivo vengono affrontate alcune dipendenze funzionali di particolare importanza per la costruzione di modelli e per l'analisi di classi di fenomeni: gli andamenti esponenziali. L'obiettivo principale è quello di potenziare il 'kit' teorico e concettuale necessario ad affrontare lo studio di situazioni reali, siano esse di carattere fisico, economico o altro, come richiesto esplicitamente dalle Indicazioni ministeriali. Sappiamo che argomenti complessi richiedono precise abilità e tecniche di trattamento; ci preme ancora una volta sottolineare l'importanza 'della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina', evitando 'dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi' (dalle Indicazioni Nazionali per i Licei).

I nodi concettuali che verranno qui affrontati riguardano :

- definizione algebrica di una funzione: forma esplicita e forma ricorsiva;
- modelli discreti e continui di andamenti esponenziali;
- proprietà locali e globali di una funzione esponenziale;
- notazioni e registri per la rappresentazione di funzioni.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Lo studente apprenderà a analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche. (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*).

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà lo studio delle funzioni quadratiche; a risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado e rappresentare e risolvere problemi utilizzando equazioni di secondo grado. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Funzioni di uso comune nelle scienze economiche e sociali e loro rappresentazione grafica.

  Costruire modelli, continui e discreti, di crescita lineare, esponenziale o ad andamento periodico a partire dai dati statistici. (*Indicazioni nazionali per gli Istituti Tecnici, settore economico*).

- Funzioni polinomiali; funzioni razionali e irrazionali; funzione modulo; funzioni esponenziali e logaritmiche; funzioni periodiche. (*Indicazioni nazionali per Istituti Tecnici, settore tecnologico/ Istituti Professionali, settori Servizi e Industria/artigianato*).

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Inserisci Testo	

Strumenti	*Icone*
Punto su	

Comandi GeoGebra con inserimento nella barra apposita

Crea – Lista punti (da tabella del Foglio di calcolo)	Selezionare i dati da due colonne; il numero di dati selezionati deve essere uguale per entrambe le colonne. Tasto destro mouse sulla selezione. *Crea* *Lista di punti*
Visualizzare etichetta e coordinate di un punto del piano cartesiano	Con il tasto destro del mouse sul punto aprire *Proprietà*. Dalla sezione *Fondamentali* spuntare *Nome e valore*.
Visualizzare un oggetto in base a determinate condizioni	Con il tasto destro del mouse sull'oggetto aprire *Proprietà*. Dalla sezione *Avanzate* inserire una condizione nel campo di testo relativo a *Condizioni per mostrare l'oggetto*. L'inserimento della condizione genererà una variabile booleana che consentirà di gestire la visualizzazione dell'oggetto.
Preferenze/Vista Grafica/Asse x/Unità	Per cambiare l'unità di misura sull'asse delle ascisse.

1. Il modello esponenziale [1]

Molti fenomeni della vita reale seguono andamenti esponenziali: gli esempi classici si riferiscono alla duplicazione di una cellula o alla crescita di un capitale depositato in banca o ancora al dimezzamento del carbonio C_{14}.

La legge esponenziale, che modellizza tali situazioni, è generalmente considerata come argomento complesso da introdurre solo nel secondo biennio della scuola superiore. Noi riteniamo invece che si possa trattare questo argomento già a partire dalla scuola media. Il progetto m@t.abel fornisce in proposito esempi strutturati, con le attività *Chicchi di riso*, per la secondaria di primo grado e *Concentrazione di un medicinale*, rivolta agli studenti della secondaria di secondo grado. Entrambe le attività partono dalla considerazione di leggi esponenziali di dominio discreto, nella fattispecie N.

Molte situazioni reali possono essere modellizzate attraverso successioni esponenziali in cui la variabile indipendente è associata a intervalli costanti di tempo (minuti, giorni, anni). La

[1] Le schede 1, 5 e 6 sono di P. Accomazzo; le schede 2, 3 e 4 sono tratte dalla sperimentazione di M. V. Martella.

natura stessa di tali fenomeni induce a una definizione di tipo ricorsivo. Gli studenti possono quindi cominciare a familiarizzare con tali modelli di crescita o decrescita, aiutati nell'analisi da software come GeoGebra, che mettono a disposizione fogli di calcolo ed ambienti grafici. Progressivamente il dominio degli esponenti si estenderà dai numeri interi ai numeri razionali e poi ai numeri reali, sino a giungere allo studio della funzione esponenziale $y = a^x$, con a numero reale positivo diverso da 1 e $x \in R$. A questo livello, con gli strumenti dell'Analisi, sarà introdotta la funzione $y = e^x$, con le sue peculiarità.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** relazioni e funzioni
- **Obiettivi**:
  - Individuare le caratteristiche di semplici successioni ad andamento esponenziale; saper passare dalla definizione di tipo ricorsivo alla definizione funzionale.
  - Data l'equazione di una funzione esponenziale di tipo $y = a^x$, comprendere il ruolo del parametro a in relazione al grafico corrispondente.
  - Saper utilizzare il grafico e la tabella numerica di una funzione esponenziale per trovare valori approssimati di potenze ad esponente razionale.
- **Ordine di scuola**:
  - Attività 1: scuola secondaria di I grado; primo biennio scuola secondaria II grado.
  - Attività 2, 3, 4, 5: secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività:**
  - Attività 1: da un problema di duplicazione cellulare all'analisi numerica e grafica di una successione a crescita esponenziale. Formula ricorsiva e funzionale.
  - Attività 2: dalla formula al grafico di una funzione esponenziale di equazione $y = a^x$.
  - Attività 3: esplorazione del Dominio e dell'Immagine di una funzione esponenziale di tipo $y = a^x$; studio dell'andamento.
  - Attività 4: dalle coordinate di alcuni punti di una funzione esponenziale alla formula algebrica.
  - Attività 5: attraverso l'analisi delle coordinate dei punti di una funzione esponenziale si ricercano valori approssimati di potenze ad esponente razionale.
  - Attività 6: risoluzione grafica di equazioni del tipo $a^x = k$.

- **Indicazioni metodologiche**:

  Nella prima scheda di lavoro viene proposto lo studio di una successione ad andamento esponenziale che modellizza un problema di ambito biologico. L'attività può essere svolta a piccoli gruppi; i risultati saranno discussi collettivamente e sistematizzati con l'aiuto dell'insegnante.

  Può essere significativo mettere a confronto il tipo di crescita esponenziale con la crescita quadratica attraverso l'analisi delle differenze prime.

  Un altro aspetto da non sottovalutare è la necessità di dominare i numeri 'grandi' che caratterizzano le crescite esponenziali: si può fare ricorso, se lo si ritiene opportuno, agli ordini di grandezza ed alla notazione scientifica.

  L'attività proposta potrebbe essere preceduta da una lezione o da una ricerca in rete sulla duplicazione per scissione delle cellule.

  Le schede successive partono dalla rappresentazione algebrica di una funzione esponenziale nella forma $y = a^x$ e propongono un'esplorazione grafica volta a dare significato al valore della base a. È importante che gli allievi mettano a fuoco gli elementi caratterizzanti una funzione esponenziale di equazione $y = a^x$:

  - insieme di variabilità di a;
  - dominio e immagine della funzione;
  - intersezione della curva corrispondente con gli assi cartesiani;
  - andamento all'infinito;
  - crescita/decrescita in dipendenza del valore di a.

  Come sempre, al termine del lavoro ci sarà una comunicazione in cui ciascun gruppo indicherà ciò che ha osservato e come ha risposto ai quesiti: sarà cura del docente operare una sintesi sul lavoro svolto.

  Non va trascurata l'indagine numerica sugli esponenziali: trattano questo argomento le schede 4, 5 e 6. In particolare, nella scheda 4 si richiede di individuare la funzione esponenziale interpolante una serie di punti di coordinata data. Le ordinate di questi punti sono per lo più numeri irrazionali indicati in forma decimale approssimata; un solo punto ha coordinate finite (2; 2.25): da esso gli allievi possono ricavare l'equazione $a^2 = 2.25$ e quindi individuare facilmente la base a della funzione esponenziale.

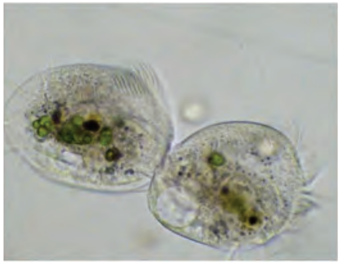
  Le schede 5 e 6 hanno lo scopo di far riflettere sul significato di potenza ad esponente razionale e sulle varie rappresentazioni che tale potenza può assumere (potenza ad esponente frazionario o decimale; radicale).

- **Tempi:**
  - Attività 1: 1 ora.
  - Attività 2 e 3: 2 ore.
  - Attività 4, 5 e 6: 1 ora e 30'.

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Sono riportati gli esempi più significativi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1



Problema

Molti tipi di batteri si riproducono per scissione. Ogni individuo della specie a un certo punto della sua vita si allunga fino a raddoppiare la sua lunghezza, quindi si assottiglia a metà fino a dare origine a due individui del tutto simili al batterio originale.

Per un certo tipo di batteri il processo di duplicazione si compie in mezz'ora.

Partendo da un solo batterio iniziale e supponendo che non intervengano alterazioni dell'ambiente che modifichino il procedimento di duplicazione o che distruggano qualche individuo della colonia, quanti batteri si potranno contare dopo 12 ore?

Quanto tempo ci vorrà perché la colonia di batteri superi le 100 unità?

Apri in un nuovo file la Vista Grafica e la Vista Foglio di calcolo.

Analizza la situazione costruendo una tabella numerica che rappresenti la situazione nell'arco di 24 ore.

- Nella colonna A del Foglio di calcolo inserisci il numero di scissioni, cioè il numero di intervalli di tempo (mezz'ora) durante i quali un batterio si duplica. Parti da 0, che scriverai in A1; dovrai arrivare sino a …..
- Affianca, nella colonna B, il numero di batteri corrispondenti (all'intervallo 0 farai corrispondere il numero 1 che scriverai in B1).
- Completa la colonna B: scrivi in B2 la formula che aggiorna il numero di batteri rispetto a B1; copia tale formula sino ad arrivare alla situazione dopo 24 ore.

Seleziona ora le colonne A e B del foglio di calcolo; con il tasto destro del mouse attiva *Crea Lista di punti*. Dimensiona opportunamente gli assi cartesiani per visualizzare l'andamento della crescita.

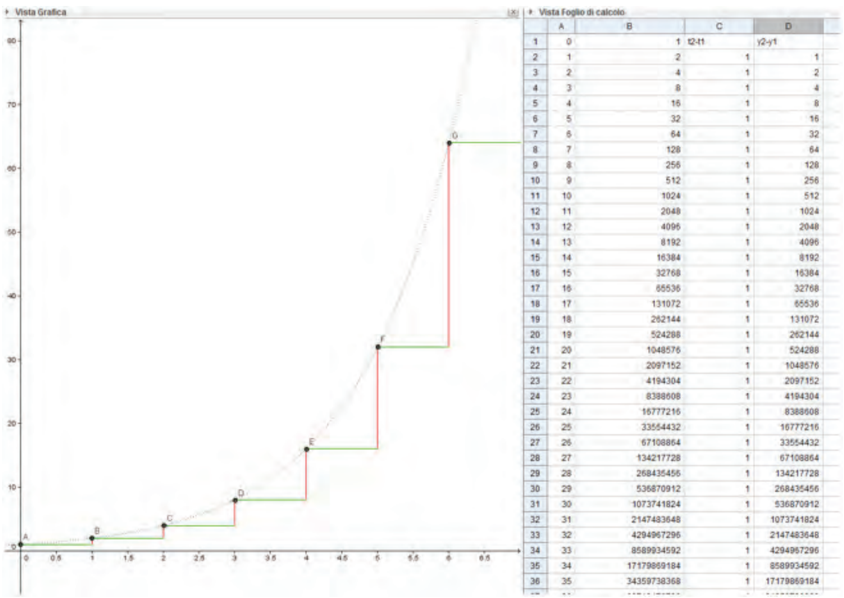
Rispondi ora alle domande del problema; per dare risposta alla seconda domanda puoi tracciare sul piano cartesiano, se lo desideri, la retta y=100.

Sapresti scrivere una formula che metta in relazione il numero di batteri con il numero di intervalli di tempo (mezz'ora) trascorsi?

Rifletti sulla rapidità di crescita della colonia di batteri: trova di quanto cresce il numero dei batteri in un intervallo di tempo. A questo proposito nella cella C2 del foglio di calcolo inserisci la formula A2-A1, che segna l'incremento di tempo; in D2 inserisci B2-B1, che segna l'incremento dei batteri nell'unità di tempo. Copia tali formule sino ad esaurire i dati delle colonne A e B.

Rifletti sui numeri della colonna D: segnano un aumento lineare? Quadratico? Altro? Indica le tue osservazioni.

Salva il file che hai costruito.



	A	B	C	D
1	0	1	t2-t1	y2-y1
2	1	2	1	1
3	2	4	1	2
4	3	8	1	4
5	4	16	1	8
6	5	32	1	16
7	6	64	1	32
8	7	128	1	64
9	8	256	1	128
10	9	512	1	256
11	10	1024	1	512
12	11	2048	1	1024
13	12	4096	1	2048
14	13	8192	1	4096
15	14	16384	1	8192
16	15	32768	1	16384
17	16	65536	1	32768
18	17	131072	1	65536
19	18	262144	1	131072
20	19	524288	1	262144
21	20	1048576	1	524288
22	21	2097152	1	1048576
23	22	4194304	1	2097152
24	23	8388608	1	4194304
25	24	16777216	1	8388608
26	25	33554432	1	16777216
27	26	67108864	1	33554432
28	27	134217728	1	67108864
29	28	268435456	1	134217728
30	29	536870912	1	268435456
31	30	1073741824	1	536870912
32	31	2147483648	1	1073741824
33	32	4294967296	1	2147483648
34	33	8589934592	1	4294967296
35	34	17179869184	1	8589934592
36	35	34359738368	1	17179869184

Videata Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2


La funzione esponenziale. Prima Parte : $y = a^x$, $a \in R^+$, $a \neq 1$

1. Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani. Considera la funzione $y = 2^{x}$.

Disegnane il grafico. Prendi un punto P sulla curva e visualizzane le coordinate (*Proprietà, Nome e valore*). Muovi P e rispondi alla seguenti domande.

- All'aumentare del valore di x_p, il valore corrispondente di y_p.............................
- Per valori sempre più piccoli di x_p (ossia per x_p che tende a -∞) i corrispondenti valori di y_p si avvicinano sempre più a..
- Per valori sempre più grandi di x_p (ossia per x_p che tende a +∞) i corrispondenti valori di y_p si avvicinano sempre più a..
- Qualunque sia il valore di x_p il valore di y_p è sempre.......................................

2. Considera la funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Disegnane il grafico. Prendi un punto P sulla curva e visualizzane le coordinate. Muovi P e rispondi alla seguenti domande.

- All'aumentare del valore di x_p, il valore corrispondente di y_p............................
- Per valori sempre più piccoli di x_p (ossia per x_p che tende a -∞) i corrispondenti valori di y_p si avvicinano sempre più a...
- Per valori sempre più grandi di x_p (ossia per x_p che tende a +∞) i corrispondenti valori di y_p si avvicinano sempre più a...

Qualunque sia il valore di x_p il valore di y_p è sempre......................................

3. Studia ciascuna delle seguenti funzioni e poi precisa e completa le affermazioni sottostanti

a. $y=\left(\frac{8}{5}\right)^x$	b. $y=\left(\frac{2}{7}\right)^x$	c. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$
d. $y=\left(\frac{5}{8}\right)^x$	e. $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$	f. $y=\left(\frac{7}{4}\right)^x$

a) I grafici delle funzioni
   - passano tutti per lo stesso punto (....;.....) cioè $f(...)$ = ..., perché......
   - intersecano/non intersecano l'asse delle ascisse; infatti se $a \neq 0$ l'equazione $a^x = 0$ ....
   - giacciono tutti nel semipiano ...., infatti se $a > 0$ allora a^x ....0 qualsiasi sia il valore di x in R.

b) Quali tra le funzioni appena disegnate hanno lo stesso andamento (crescente/decrescente) di $y = 2^x$?

c) Quali tra le funzioni appena disegnate hanno lo stesso andamento (crescente/decrescente) di $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$?

d) In generale, puoi individuare che relazione c'è fra il valore della base a della funzione esponenziale e l'andamento del grafico?

4. Data la funzione $y = a^x$, che cosa succede se a =1?

Scheda per lo studente Attività 3

Caratteristiche di una funzione esponenziale di tipo $y = a^x$, $a \in R^+$, $a \neq 1$

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Costruisci uno *slider* di nome a e fai in modo che il suo intervallo di variabilità vada da 0 a 10, con passo 0.1.

Nella barra di immissione scrivi la formula della funzione $f(x) = a^x$. Fai visualizzare soltanto i grafici corrispondenti ad $a \neq 0$ ed $a \neq 1$: per fare questo, con il tasto destro del mouse sulla funzione, apri la finestra delle *Proprietà*. Scegli la sezione *Avanzate* e nella casella *Condizioni per mostrare l'oggetto* scrivi $a \neq 0 \wedge a \neq 1$, aiutandoti con il tastierino alfanumerico contrassegnato con α che si apre dopo avere cliccato all'interno della casella di inserimento.

Costruisci uno *slider* di nome h e fai in modo che il suo intervallo di variabilità vada da -100 a 100, con passo 1.

Nella barra di immissione scrivi l'equazione della retta $x = h$; chiama r tale retta.

1. *Dominio della funzione esponenziale ed intersezioni con una retta verticale*

Osserva il grafico della funzione esponenziale $f(x)$ e della retta r. Usando gli *slider* fai variare, uno alla volta, i parametri a e h :

- per quali valori di h la retta r interseca il grafico della funzione esponenziale?
- in quanti punti?

Le osservazioni precedenti sono supportate dal fatto che il dominio della funzione esponenziale è ....

2. *Immagine della funzione esponenziale*

Costruisci uno *slider* di nome q e fai in modo che il suo intervallo di variabilità vada da −100 a 100, con passo 1.

Nella barra di immissione scrivi l'equazione della retta $y = q$; chiama t tale retta.

Osserva il grafico della funzione esponenziale $f(x)$ e della retta t. Usando gli *slider* fai variare, uno alla volta, i parametri a e q :

- per quali valori di q la retta t interseca il grafico della funzione esponenziale?
- in quanti punti?

Le osservazioni precedenti sono supportate dal fatto che l'immagine della funzione esponenziale è...

La funzione esponenziale è invertibile? Giustifica le tue affermazioni.

3. *Andamento della funzione esponenziale al variare della base a*

Nascondi le rette r e t e fissa l'attenzione sul grafico di $y = a^x$. Dati due punti della curva di ascissa $x1$ e $x2$ si può affermare che:

- se $0 < a < 1$ e $x_1 > x_2$ allora $a^{x_1} \ldots a^{x_2}$ ossia l'andamento dell'esponenziale è ……..
- se $a > 1$ e $x_1 > x_2$ allora $a^{x_1} \ldots a^{x_2}$ ossia l'andamento dell'esponenziale è ………

Salva il file che hai costruito

Scheda per lo studente Attività 4

Dai punti del grafico alla formula di una funzione esponenziale

La seguente tabella riporta le coordinate di alcuni punti del grafico di una funzione esponenziale di equazione tipo $y = a^x$. I valori delle ordinate sono numeri irrazionali approssimati alla terza cifra decimale ; solo all'ascissa 2 corrisponde un'ordinata decimale finita.

x	-7	-6	-4.5	-2.5	-0.5	1.5	2	3	4	5
y	0.059	0.088	0.161	0.363	0.817	1.837	2.25	3.375	5.063	7.594

Apri in un nuovo file la Vista Grafica e la Vista Foglio di calcolo.

Riporta queste coppie di valori sul Foglio di calcolo, inserendo le ascisse nella colonna A e le ordinate nella colonna B.

Crea un grafico a dispersione con questi dati:

- usa il mouse per evidenziare tutte le celle delle colonne A e B che contengono numeri;
- clicca con il tasto destro sulla selezione e attiva *Crea una lista di Punti* dal menu contestuale che appare.

Cerca quindi di fare una previsione circa l'equazione della funzione a cui appartengono questi punti.

Inserisci questa equazione nella barra di inserimento per controllare l'esattezza della tua previsione.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 5

Utilizza il grafico di una funzione esponenziale per trovare valori approssimati alla quarta cifra decimale per le seguenti espressioni

$$\sqrt[4]{2}, 2^{1.5}, 2^{\frac{3}{4}}, \sqrt[3]{3}, 3^{-\frac{1}{2}}, 3^{2.5}$$

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Dalla barra del Menu apri la tendina di *Opzioni*, seleziona la voce *Arrotondamento* e scegli almeno 5 cifre decimali.

Costruisci il grafico della funzione $y = 2^x$.

Prendi un punto B sull'asse x e visualizzane le coordinate.

Nella Barra di inserimento scrivi l'equazione della retta $x = x(B)$

Trova il punto di intersezione A tra la retta $x = x(B)$ e la funzione esponenziale e visualizza le coordinate di tale punto.

Supponi ora di voler ricavare un valore approssimato di $\sqrt[5]{2}$, che equivale a $2^{\frac{1}{5}}$ o a $2^{0.2}$. Muovi il punto B sull'asse x in modo che l'ascissa di B sia 0.2; se non riesci a collocare B sul valore desiderato immetti da Barra di inserimento le coordinate esatte del punto in cui desideri che si posizioni B, cioè (0.2, 0).

Osserva le coordinate del punto A ed indica un risultato approssimato dell'espressione $\sqrt[5]{2}$.

Con lo stesso sistema, lavorando prima sulla funzione $y = 2^x$ e poi su $y = 3^x$ ricava i valori decimali, sino alla quarta cifra delle espressioni richieste.

Scheda per lo studente Attività 6

Risolvi graficamente un'equazione esponenziale di tipo $a^x = k$.

Si vuole ricavare un valore di x che soddisfa l'equazione $2^x = 6$, approssimato alla quarta cifra decimale.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Richiedi che siano visualizzate le coordinate dei punti con 5 cifre decimali.

Disegna il grafico di $y = 2^x$.

Prendi un punto B sull'asse y e visualizzane le coordinate.

Nella Barra di inserimento digita la formula $y = y(B)$ e fai disegnare la retta orizzontale che passa per B; chiama A il punto di intersezione di tale retta con il grafico di $y = 2^x$ e visualizza le coordinate di A.

Muovi il punto B in modo che la sua ordinata sia 6: qual è la soluzione dell'equazione $2^x = 6$ approssimata alla quarta cifra decimale?

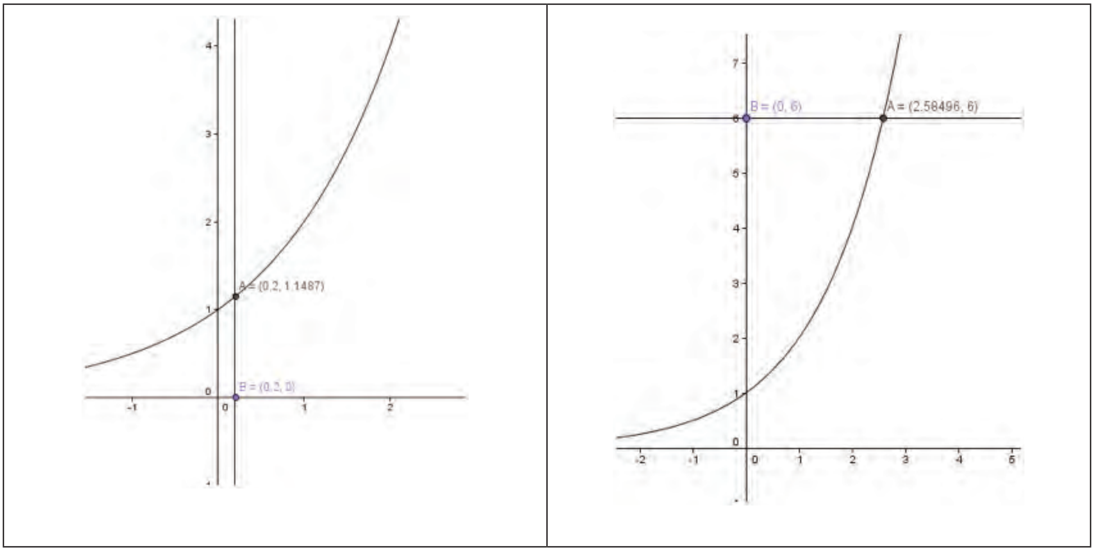
Con lo stesso sistema trova valori approssimati delle radici delle seguenti equazioni:

$$2^x = 1.5;\ 2^x = 3;\ 2^x = 0.25$$

e di

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2\ ;\ \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{2}\ ;\ \left(\frac{1}{3}\right)^x = 5\ .$$

In generale, data un'equazione di tipo $a^x = k$, con $a \in R^+$, $a \neq 1$, quali valori reali può assumere k perché l'equazione abbia soluzione?



Videate Attività 5 e 6

CAPITOLO 3

Come varia un fenomeno: funzioni e modelli
Le funzioni periodiche

Introduzione

Nel 'kit' teorico e concettuale necessario ad affrontare lo studio di situazioni di carattere fisico, economico o altro non possono mancare le funzioni periodiche. Infatti molti fenomeni reali si ripetono dopo un determinato intervallo di tempo: pensiamo al susseguirsi delle stagioni o al getto di una fontana programmata per compiere un certo tipo di evoluzioni.

In ambito strettamente matematico si trovano modelli periodici significativi nella ripetizione delle cifre decimali di un numero razionale o ancora nelle classi di resto modulo n, che definiscono una partizione dei numeri interi sulla base dei resti della divisione per n.

Naturalmente le funzioni periodiche per eccellenza sono le funzioni goniometriche, a cui andrà assegnata un'attenzione particolare.

I nodi concettuali che verranno affrontati in questo capitolo riguardano:

- funzioni periodiche: il significato di periodo;
- funzioni goniometriche e loro andamento;
- combinazione lineare di funzioni goniometriche;
- notazioni e registri per la rappresentazione di funzioni.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni. *(Indicazioni nazionali per i Licei)*.
- Lo studente apprenderà a analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche. *(Linee guida Istituti Tecnici e Professionali)*.

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

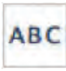
- Lo studente apprenderà lo studio delle funzioni quadratiche; a risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado e rappresentare e risolvere problemi utilizzando equazioni di secondo grado. *(Indicazioni nazionali per i Licei)*.
  Funzioni di uso comune nelle scienze economiche e sociali e loro rappresentazione grafica.
- Costruire modelli, continui e discreti, di crescita lineare, esponenziale o ad andamento periodico

a partire dai dati statistici. *(Indicazioni nazionali per gli Istituti Tecnici, settore economico).*

- Funzioni polinomiali; funzioni razionali e irrazionali; funzione modulo; funzioni esponenziali e logaritmiche; funzioni periodiche *(Indicazioni nazionali per Istituti Tecnici, settore tecnologico/Istituti Professionali, settori Servizi e Industria/artigianato).*

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Inserisci Testo	

Strumenti	*Icone*
Punto su	

Comandi GeoGebra con inserimento nella barra apposita

floor (x)	Funzione che, dato un numero reale x, restituisce il più grande intero minore o uguale ad x.
Resto [num1,num2]	Operatore che restituisce il resto della divisione fra due numeri interi num1 (dividendo) e num2 (divisore).

OSSERVAZIONE a proposito della misura di angoli in gradi:

GeoGebra utilizza i radianti per il calcolo interno. Il simbolo di grado (°) non è altro che la costante $\pi/180$ utilizzata nella conversione gradi-radianti.

Esempio:

- Se $a = 30$ è un numero, allora si può ottenere la misura di un angolo $\alpha = 30°$ scrivendo $\alpha = a°$.
- Digitando $b = \alpha / °$, l'angolo α viene riconvertito nel numero a, ovvero si ottiene $b = 30$. Infatti il simbolo ° è semplicemente il sostituto della divisione fra π e 180 che fa passare la misura di un angolo da gradi a radianti (° = pi/180).

OSSERVAZIONE a proposito del testo statico o dinamico:

Nelle attività di questo capitolo si richiede di inserire nella Vista Grafica un testo composto da una parte statica E una parte dinamica, legata agli oggetti variabili del file. Per inserire un testo così composto, ad esempio una frase che visualizzi le coordinate di un punto A variabile nel piano nella forma *Coordinate di A*= seguito dai valori numerici che tali coordinate assumono:

- dopo aver segnato *il punto A* nella Vista grafica attivare lo strumento *Inserisci testo* e fare click sul punto della Vista Grafica su cui si vuole far comparire il testo;
- digitare nella finestra visualizzata: *Coordinate di A* =. Questa sarà la parte statica del testo e non subirà modifiche se il punto A verrà spostato.
- Inserire la parte dinamica del testo selezionando A nell'elenco a discesa *Oggetti*.
- Fare clic su *OK*.
- Modificare la posizione del testo utilizzando lo strumento Muovi.

È possibile modificare le proprietà del testo nella finestra di dialogo *Proprietà* (ad esempio stile e dimensione del carattere, formato). La scheda *Fondamentali* consente di fissare la posizione del testo in modo da evitare un suo spostamento accidentale.

1. Funzioni periodiche[1]

Dopo avere ben compreso il concetto di *periodicità* gli allievi devono imparare a formalizzare la caratteristica di ripetizione periodica di un fenomeno sia nel registro grafico che nei registri numerico e simbolico. È importante presentare agli studenti esempi di funzioni periodiche che si riferiscono a contesti diversi, in modo da fornire un'ampia esperienza in proposito.

Naturalmente va dato largo spazio alle funzioni goniometriche. Seguendo le Indicazioni nazionali, tali funzioni andrebbero introdotte dopo che gli operatori angolari seno e coseno sono stati definiti attraverso la similitudine di triangoli rettangoli e utilizzati nella risoluzione dei triangoli. Non va tralasciata l'esperienza numerica con l'uso della calcolatrice prima ancora di parlare di cerchio goniometrico.

Un altro nodo concettuale delicato, propedeutico all'introduzione delle funzioni angolari, è il passaggio dalla misura di un angolo in gradi alla misura in radianti e la considerazione di angoli superiori all'angolo giro.

Non verranno trattati in questa sede tali importanti prerequisiti; invitiamo tuttavia gli insegnanti a verificarne la padronanza da parte degli allievi.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - Riconoscere un fenomeno periodico e saperlo modellizzare con una funzione.
  - Riconoscere la periodicità dei resti nella divisione fra numeri interi e associare tale proprietà alla definizione di funzioni periodiche.
- **Ordine di scuola**:
  - Attività 1, 2 e 3: secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività:**
  - Attività 1: attraverso un quesito rilasciato OCSE PISA si invitano gli alunni a riflettere sul grafico di una funzione periodica. In seguito si sfrutta la periodicità dei resti di una divisione fra interi per ricavare la formula di una particolare funzione periodica di cui è descritto l'andamento grafico.
  - Attività 2: il seno di un angolo sulla circonferenza goniometrica. Misure di angoli in gradi e radianti; la funzione $y = \sin x$, con $0 \leq x < 2\pi$.
  - Attività 3: il coseno di un angolo sulla circonferenza goniometrica. La funzione $y = \cos x$, con $0 \leq x < 2\pi$.
  - Attività 4: combinazione lineare di sinusoidi.

[1] Le schede 1 e 4 sono di P. Accomazzo, le schede 2 e 3 sono liberamente tratte dalle sperimentazioni effettuate nell'ambito del progetto *Comunità di pratica con il software GeoGebra*.

- **Indicazioni metodologiche**:

Si suggerisce di sottoporre agli studenti esempi di vario genere di funzioni periodiche, con diverse rappresentazioni dalle quali possa essere messo a fuoco il concetto di periodo. Nell'Attività 1 si propone come esercizio di lettura grafica il quesito *Il Faro* rilasciato da OCSE Pisa nel 2006.

La fase successiva è quella della rappresentazione matematica di un fenomeno periodico.

L'attività proposta richiama il contesto del faro; la rappresentazione grafica corrispondente può essere ottenuta operando su *R* con la divisione intera ed il suo resto secondo la formula $r = a - b\,q$, dove a e b sono rispettivamente dividendo e divisore, q il quoziente e r il resto.

Il passaggio da un numero reale alla sua parte intera e le operazioni aritmetiche di divisione fra interi e resto vanno quindi tradotte nel linguaggio di GeoGebra con la ricerca degli operatori opportuni, la comprensione delle loro limitazioni e della loro sintassi.

Nella rappresentazione grafica con GeoGebra l'insegnante può scegliere se

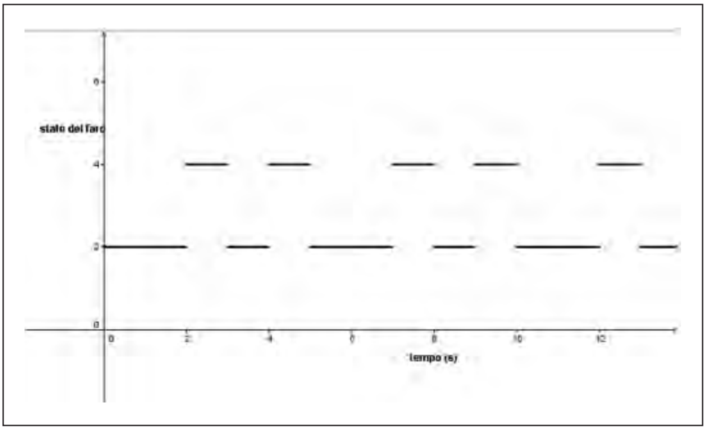
- ◦ far lavorare gli studenti con una valutazione numerica sul singolo valore della variabile indipendente che porta a disegnare la funzione punto per punto con lo strumento Traccia. In tal caso può essere usato l'operatore GeoGebra Resto[num1,num2] che richiede in ingresso due numeri interi (questa procedura è descritta dettagliatamente nella Scheda per lo studente Attività 1);

oppure

- ◦ optare per un ragionamento più generale, da formalizzare tramite una funzione. Non potendo usare in questo caso l'operatore GeoGebra *Resto* occorre definire una funzione *r(x)* che produca lo stesso risultato su un generico valor $x \in R$. In tal caso occorre
  - definire innanzitutto il periodo T della funzione;
  - trovare quanti intervalli T sono trascorsi dall'inizio dell'evento all'istante x tramite la divisione x/T;
  - seguendo la procedura indicata dalla tabella di analisi sullo stato del faro (Scheda per lo studente Attività 1): definire la funzione *resto* applicando la formula della divisione intera ($r = a - b\,q$) dove il dividendo è x, il divisore intero è T ed il quoziente è la parte intera di x/T e assegnare tale risultato alla funzione *r(x)*. In linguaggio GeoGebra $r(x) = x - \mathit{floor}(x/T) \cdot T$;
  - definire la funzione a tratti $f(x)$ come indicato nella Scheda Attività 1.

Di seguito il protocollo di costruzione e la videata relativa a questa seconda procedura.

N.	Nome	Definizione	Legenda
1	Numero T		Dalla barra di inserimento si assegna un valore a T (in questo caso T=5)
2	Funzione r	r(x) = x - floor(x / T) T	Si definisce la funzione r(x) che indica quanti secondi mancano a x per completare un periodo
3	Funzione f	f(x) = Se[x ≥ 0,Se[0 ≤ r(x) < 2, 2,Se[2 ≤ r(x) < 3, 4, Se[3 ≤ r(x) < 4, 2,Se[0 ≤ r(x) < 5,4]]]]]	Si definisce la funzione a tratti f(x) che rappresenta lo stato del faro



In entrambi i casi lavorare su questo tipo di formule aiuta a comprendere l'espressione algebrica di periodicità rappresentata da $f(x) = f(x + T)$, ove T indica il periodo o, per ciò che riguarda soluzioni periodiche di equazioni, $x = \alpha + k \cdot T$, con $k \in Z$. Sono queste espressioni che gli allievi spesso faticano a comprendere, proprio perché non è semplice tradurre la periodicità in forma algebrica.

Per quanto riguarda le due attività sulle funzioni goniometriche seno e coseno, occorre osservare, come già indicato nelle prime pagine del capitolo, che GeoGebra utilizza i radianti per il calcolo interno. Bisogna quindi porre molta attenzione al fatto che gli allievi realizzino quali misure di uno stesso angolo sono espresse in gradi e quali in radianti. A questo proposito la scheda chiede di visualizzare le varie coordinate dei punti; sempre per far riflettere sul passaggio da gradi a radianti viene richiesto agli allievi di esplicitare la formula di conversione. Può essere utile osservare che, dato l'angolo di $\alpha°$ variabile sulla circonferenza goniometrica, nel momento in cui si definisce un punto S di ascissa pari alla misura di tale angolo GeoGebra traduce automaticamente la misura in radianti.

Un ulteriore punto di riflessione sulle schede 2 e 3 dovrebbe riguardare il fatto che le funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$ possono avere come dominio tutto R. Tuttavia in questo contesto vengono costruiti solo i tratti che vanno da 0 a 2π: ciò dipende semplicemente dal fatto che in base alla definizione di angolo a partire da un punto sulla circonferenza GeoGebra non misura oltre l'angolo giro.

Tempi:

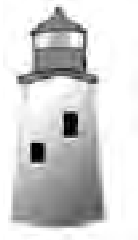
- Attività 1: 1 ora e 30'.
- Attività 2 : 1 ora.
- Attività 3 : 1 ora.
- Attività 4: 1 ora.

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4.

Sono riportati gli esempi più significativi di videate relative ai vari casi ed il protocollo di costruzione del grafico del faro.

Scheda per lo studente Attività 1

Il faro[3]



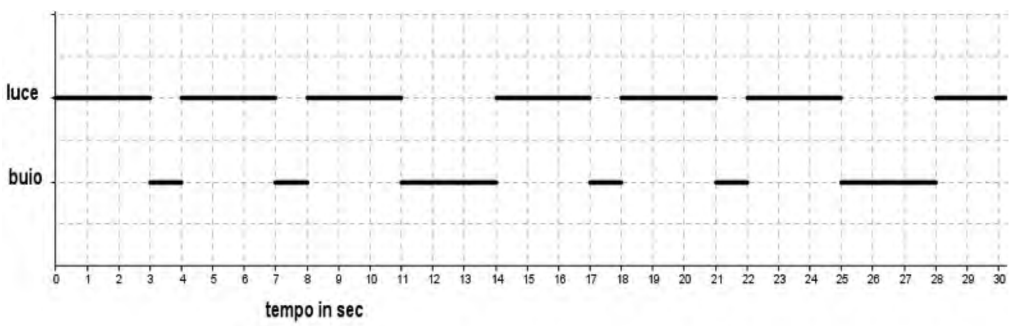
I fari sono torri che hanno, in cima, un dispositivo per emettere luce.

I fari aiutano le navi a trovare la rotta di notte quando navigano in prossimità della costa.

Il faro emette segnali luminosi con una sequenza regolare fissa.

Ciascun faro ha una propria sequenza.

Il diagramma qui sotto rappresenta la sequenza dei segnali di un determinato faro. I segnali luminosi si alternano a momenti di buio.



Si tratta di una sequenza regolare che si ripete dopo qualche tempo. Il tempo necessario per completare una sequenza, prima che cominci a ripetersi, si chiama periodo.

Se trovi il periodo di una sequenza, è facile continuare il diagramma per i successivi secondi, minuti o persino ore.

Quale, fra i seguenti periodi, può corrispondere alla sequenza di questo faro?

A - 3 secondi

B - 4 secondi

C - 11 secondi

D - 14 secondi

[2] Il quesito è liberamente tratto dalle prove rilasciate OCSE PISA 2006

Ancora fari: un secondo esempio.

Ricostruisci sul piano cartesiano di GeoGebra il diagramma che rappresenta la sequenza dei segnali di un faro che in un periodo di tempo della durata di 5 secondi ha il seguente comportamento:

- *nei primi due secondi dall'inizio dell'osservazione è buio;*
- *tra i due e i tre secondi dall'inizio dell'osservazione manda luce;*
- *tra i tre e i quattro secondi dall'inizio dell'osservazione è buio;*
- *tra i quattro e i cinque secondi dall'inizio dell'osservazione manda luce.*

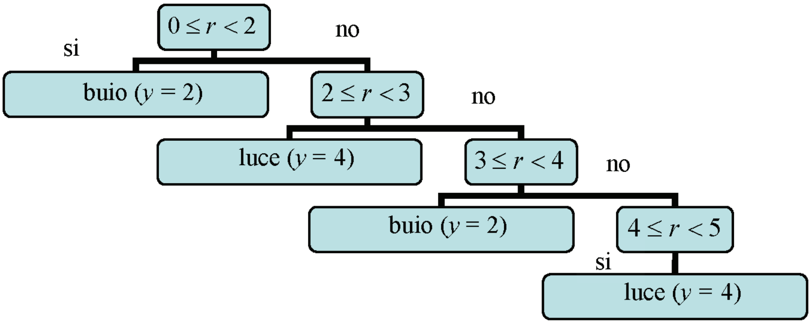
Il comportamento del faro si ripete in modo identico nel periodo successivo.

Fai qualche previsione sul fatto che il faro sia acceso/spento completando la seguente tabella dove T è il periodo completo

Tempo s trascorso dall'inizio dell'evento (in secondi)	Stato del faro (luce/buio)	Osservazioni	Quanti secondi mancano per completare un periodo *(resto)*
2.2	luce	$2.2=0\cdot 5$ secondi $+2.2$ secondi	2.2
4.5	….	….	….
7.2	luce	$7.2=1\cdot 5$ secondi $+2.2$ secondi	2.2
8.5	….	….	….
11	….	…..	….
22.2	luce	$22.2= 4\cdot 5$ secondi $+2.2$ secondi	2.2
22.5	….	…..	…..

Quindi per sapere qual è lo stato del faro ad un istante s devi scoprire quanti periodi sono contenuti nel numero s, sottrarli da s e tenere conto solo del *resto*.

Il *resto*, che indicheremo con la variabile r determinerà la situazione del faro. In analogia con il grafico del quesito '*Il faro*' indicheremo con punti di ordinata 2 lo stato di buio e con punti di ordinata 4 lo stato di luce. Quindi



Apri ora un nuovo file di GeoGebra e visualizza la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Prendi un punto A sull'asse x: la sua ascissa segnerà la variabile *tempo* (s).

Per costruire la variabile *r* puoi usare il comando *Resto* [dividendo, divisore] in cui dividendo e divisore sono numeri interi. Il dividendo in questo caso è il tempo trascorso, cioè l'ascissa di A; per applicare il comando *Resto* dovrai usare solo la parte intera di *x*(A), attraverso il comando *floor*(*x*(A)):

t = *floor* (*x*(A)) *e* *r* = *Resto* [*t*,5]

Costruisci ora il punto P che descrive lo stato del faro al trascorrere del tempo; la sua ordinata sarà definita da una serie di istruzioni di scelta Se[<condizione>, <allora>, <altrimenti>] 'annidate'. Completa l'istruzione seguendo il diagramma sopra rappresentato:

P=(x(A), Se[0≤r<2, 2, Se[2≤r<3,….., Se[….,.....]]])

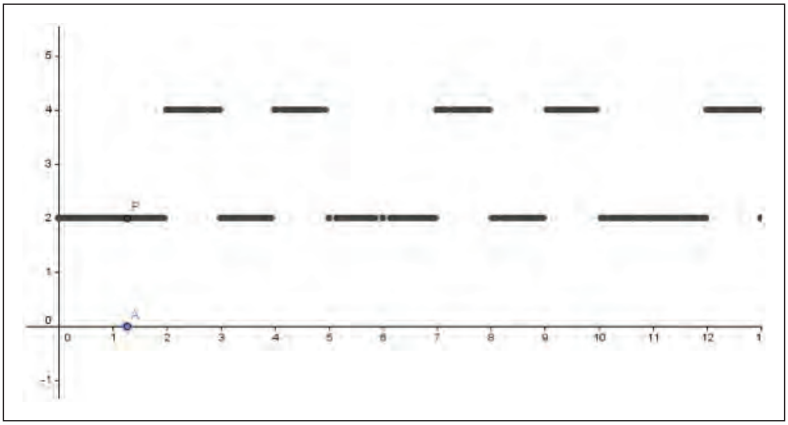
P deve essere visibile soltanto quando x(A) è maggiore o uguale a zero: imposta quindi le sue condizioni di visibilità da *Proprietà/Avanzate/Condizioni per mostrare l'oggetto*, inserendo nella casella opportuna *x*(A)≥0.

Attiva la traccia di P e muovi il punto A per visualizzare lo stato del faro al variare del tempo.

Salva il file che hai costruito.

N.	**Nome**	**Icona**	**Definizione**
1	Punto A		Punto su asse x
2	Numero t		floor(x(A))
3	Numero r		Resto[t, 5]
4	Punto P		(x(A), Se[0 ≤ r < 2, 2, Se[2 ≤ r < 3, 4, Se[3 ≤ r < 4, 2, Se[4 ≤ r < 5,4]]]]) definito dalla Barra di inserimento

Protocollo di costruzione Attività 1



Videata Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2

La funzione y = sin α *con* α *variabile tra 0 e 2π*

Apri in un nuovo file la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Nel piano cartesiano segna il punto O origine degli assi.

Costruisci una circonferenza di centro O e raggio 1.

Chiama A l'intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse.

Prendi un punto P sulla circonferenza e visualizzane le coordinate. Traccia il segmento PO.

Con il comando *Angolo*, definisci l'angolo AOP – misurandolo in gradi – e chiamalo α.

Con il comando *Testo* visualizza la misura di α, precisando che è riferita al grado: nella casella di testo scrivi α^o = e seleziona α nella tendina degli Oggetti.

Sotto al testo che visualizza α^o mostra anche la misura dell'angolo a in radianti;

come saprai la formula di trasformazione da gradi a radianti è $\alpha_r = \dfrac{\alpha \cdot \pi}{180}$. Quindi

- nella casella di testo scrivi α_r=
- seleziona a nella tendina degli *Oggetti* e, dentro al riquadro in cui è racchiuso α, scrivi (α*pi/180)/°

Ingrandisci entrambe le scritte attraverso le loro Proprietà, scegliendo un carattere Medio e grassetto.

Traccia il segmento PH perpendicolare all'asse delle x e coloralo di verde.

Definisci il punto S=(α, y(P)); visualizzane le coordinate.

Attiva la traccia di S; muovi il punto P sulla circonferenza ed osserva come varia S sul piano cartesiano. Osserva che sulla circonferenza goniometrica l'angolo α è misurato in gradi; sul piano cartesiano l'ascissa di S è stata convertita automaticamente in radianti.

Scegli quindi di visualizzare come unità di misura sull'asse delle ascisse il radiante; puoi farlo cliccando in alto a destra su *Preferenze* */Vista Grafica/Asse x/Unità* e scegliendo π.

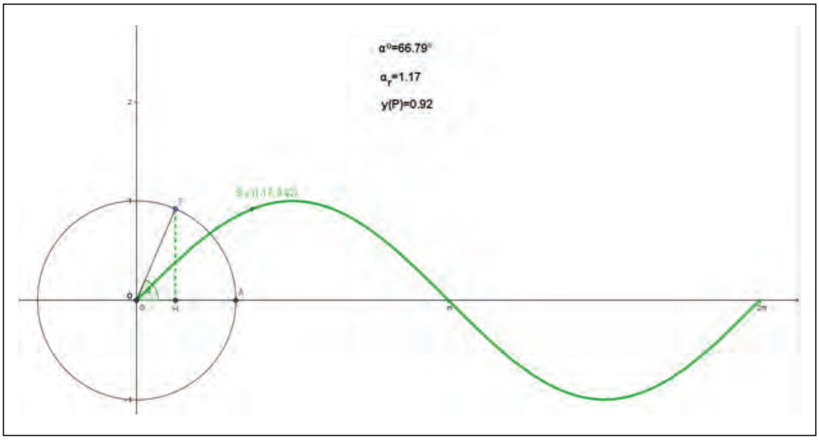
Se lo desideri, costruisci quindi il *Luogo* del punto S al variare di P sulla circonferenza.

Rispondi ora alle seguenti domande:

- Tra quali valori varia l'ordinata di P?
- Se ci limitiamo al primo quadrante, considerando il triangolo OPH di ipotenusa 1, riconosciamo in $y(P)/1$ la definizione di seno dell'angolo α riferita ad un triangolo rettangolo. Estendendo il significato di *seno* di un angolo ad angoli superiori a 180° osserviamo come varia $y(P)$ al variare di α:
    - Se $\alpha = 0°$ il suo seno vale …. e S =(…;…)
    - Se $\alpha = 90°$, cioè, in radianti a =…….sin α =….e S = (…;…)
    - Se $\alpha = 180°$, cioè, in radianti a =…… sin α =….e S = (…;…)
    - Se $\alpha = 270°$, cioè, in radianti a =…… sin α =….e S = (…;…)
- Come si comporta la curva rappresentativa della funzione seno per α che varia
    - tra 0° e 90°?
    - tra 90° e 180°?
    - tra 180° e 270°?
    - tra 270° e 360°?
- Per come è stato costruito l'angolo AOP può assumere solo valori compresi fra 0° e 360°. Se GeoGebra tenesse conto dei giri completi di P sulla circonferenza (ovvero misurasse anche angoli superiori ai 360°) che tipo di curva traccerebbe S sul piano cartesiano?
    - una curva che cresce indefinitamente?
    - una curva che si ripete in modo periodico? Se si, con quale periodo T?
    - una curva di cui non si può prevedere l'andamento?

Nella barra di inserimento digita la funzione $y = sin(x)$: che cosa cambia rispetto alla traccia disegnata da S?

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 1

Scheda per lo studente Attività 3

La funzione y=cos α con α variabile tra 0 e 2π

Apri in un nuovo file la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Ripeti la costruzione precedente con le seguenti modifiche:

- costruisci il segmento OH, dove H è il punto che si ottiene proiettando un punto P della circonferenza sull'asse *x*; colora OH di blu;
- costruisci il punto C = (α, x(P));
- attiva la traccia di C; muovi il punto P sulla circonferenza ed osserva come varia C sul piano cartesiano.

Rispondi ora alle seguenti domande:

- Tra quali valori varia la misura di *x*(P)?
- *x*(P) rappresenta l'ascissa dell'estremo dell'arco AP; considerando il triangolo rettangolo OPH di ipotenusa 1, riferito al primo quadrante possiamo dire che *x*(P)/1 è il coseno dell'angolo α.

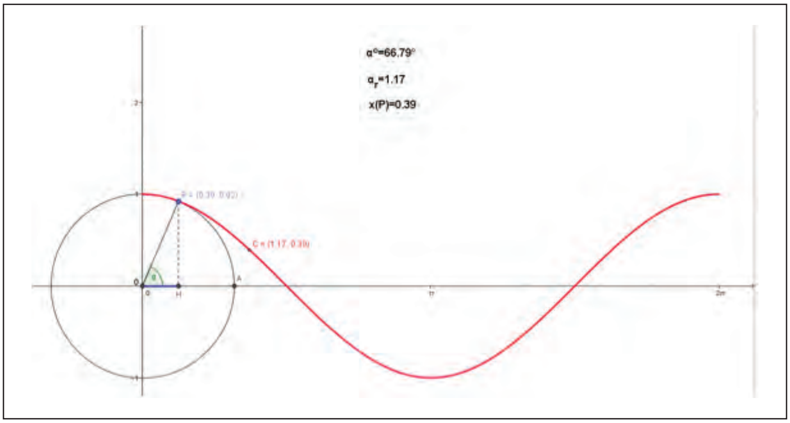
Come abbiamo fatto in precedenza per il seno estendiamo la definizione di coseno ad angoli superiori a 90°. Come varia *x*(P), ovvero il coseno al variare di α?

- ◦ Se α = 0° il suo coseno vale …. e C = (…;…)
- ◦ Se α = 90°, cioè, in radianti α =……. cos α =…. e C = (…;…)
- ◦ Se α = 180°, cioè, in radianti α =…… cos α =…. e C = (…;…)

- Se $\alpha = 270°$, cioè, in radianti α =...... cos α =... C = (...;...)
- Come si comporta la curva rappresentativa della funzione coseno per α che varia
  - tra 0° e 90°?
  - tra 90° e 180°?
  - tra 180° e 270°?
  - tra 270° e 360°?
- Per come è stato costruito l'angolo AOP può assumere solo valori compresi fra 0° e 360°. Se GeoGebra tenesse conto dei giri completi di P sulla circonferenza (ovvero misurasse anche angoli superiori ai 360°) che tipo di curva traccerebbe C sul piano cartesiano?
  - una curva che cresce indefinitamente?
  - una curva che si ripete in modo periodico?
  - una curva di cui non si può prevedere l'andamento?

Nella barra di inserimento digita la funzione $y = cos(x)$: che cosa cambia rispetto alla traccia disegnata da C?

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 3

Scheda per lo studente Attività 4

Combinazioni lineari di funzioni sinusoidali

1. $h(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \; con \; a \; e \; b \in \mathrm{R}.$

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Assegna inizialmente alle variabili a e b il valore 1.

Traccia i grafici delle funzioni $f(x) = a \cdot \sin x$ e di $g(x) = b \cdot \cos x$; costruisci quindi la funzione somma $h(x) = f(x)+g(x)$.

Che tipo di funzione si ottiene sommando le due funzioni $y = \sin x$ ed $y = \cos x$? Qual è il periodo della funzione somma? In che relazione è con il periodo delle due funzioni componenti? Qual è l'ampiezza della nuova funzione?

Modifica ora i valori di a e di b trasformando a e b in due *slider*: in Vista Algebra clicca sul pallino bianco che sta a sinistra delle due variabili, rendendole visibili. Osserva l'apparire dei due *slider* nella Vista Grafica.

Cambia i valori di a e di b: come cambia la funzione somma? Qual è il suo periodo? Per valutare tale valore puoi visualizzare opportuni punti di intersezione della funzione somma con l'asse x e calcolare la lunghezza dell'intervallo corrispondente.

Come cambia l'ampiezza della funzione somma al variare di a e b? Per valutare tale valore, seppur in modo approssimato, puoi prendere un punto C variabile sull'asse y e visualizzarne le coordinate, costruire la retta $y = y(C)$ e muovere il punto C in modo che la retta orizzontale passi per il massimo della funzione somma.

In conclusione, cosa si può dire dei grafici delle funzioni di tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b, m, n, \in$R? A quali formule trigonometriche può essere associata la loro espressione?

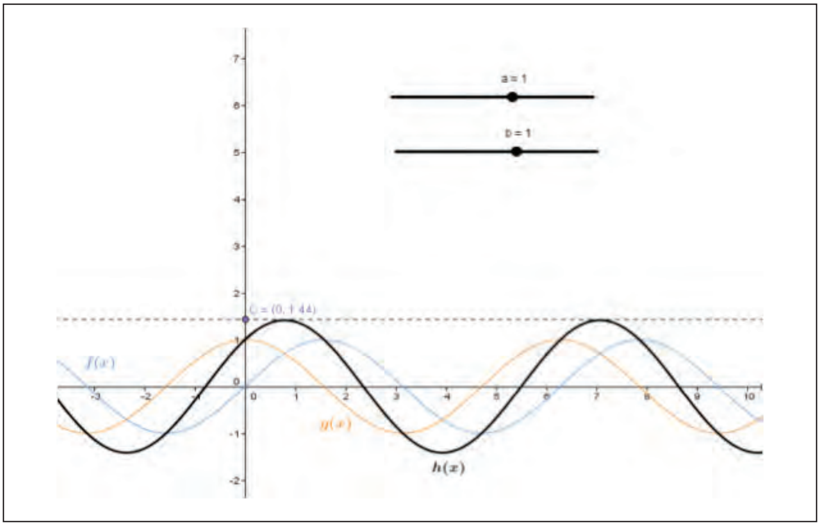
2. $h(x) = a \cdot \sin(m \cdot x) + b \cdot \cos(n \cdot x)$ con $a, b, m, n \in \mathrm{R}$

Riprendi il file precedente. Costruisci due *slider* per le variabili m ed n, con valori variabili da 1 a 6 e passo 1. Modifica le formule delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ in modo che il loro argomento sia rispettivamente $m \cdot x$ e $n \cdot x$.

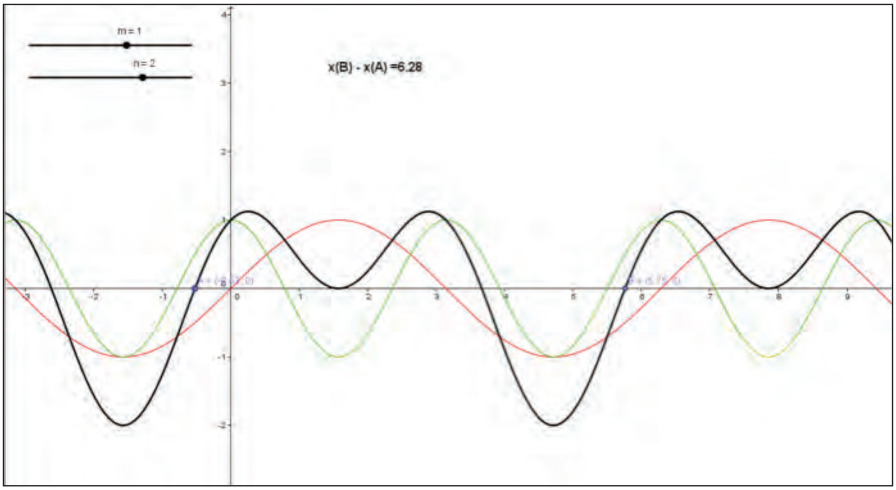
Assegna ad a e a b il valore 1 e nascondi gli slider corrispondenti alle due variabili.

Cambia i valori di m e di n ed osserva il comportamento della funzione somma: per quali valori di m ed n si ottiene ancora una sinusoide? Qual è il suo periodo in relazione al periodo delle due funzioni componenti? Per valutare tale valore, seppur in modo approssimato, puoi prendere due punti A e B sull'asse x e visualizzarne le coordinate, posizionare manualmente A e B in modo tale che il segmento AB corrisponda ad un periodo della funzione somma e visualizzare la differenza $x(B) - x(A)$.

In conclusione, cosa si può dire dei grafici delle funzioni di tipo $a \cdot \sin(m \cdot x) + b \cdot \cos(n \cdot x)$ con $a, b, m, n \in$R? A quali formule trigonometriche può essere associata la loro espressione?



Videata Attività 4_1



Videata Attività 4_2

CAPITOLO 4

Funzione reciproca o inversa di una funzione: quale differenza?

Introduzione

È necessario conoscere limiti e derivate per disegnare grafici di funzioni? GeoGebra agevola la scoperta delle caratteristiche di alcuni operatori elementari, individuando come agiscono sulla funzione di partenza e come questa viene modificata, quali caratteristiche rimangono invariate, consentendo poi di trovare il grafico trasformato anche senza l'uso del software.

La conoscenza di limiti e derivate può aiutare ad approfondire lo studio dei grafici e capire più a fondo come le trasformazioni di cui si parlava si realizzano; ma in molti casi è sufficiente analizzare le trasformazioni relative ad un certo numero di funzioni, capirne i meccanismi, giustificarli algebricamente per essere poi in grado di tracciare grafici addirittura senza conoscere l'equazione della funzione di partenza, ma solamente il suo grafico. Questo può risultare particolarmente utile nelle applicazioni di altre discipline, quando si deve studiare un fenomeno di cui si conosce la legge o anche in matematica (ad esempio nel caso dello studio di disequazioni).

La trasformazione di grafici poi può chiarire alcuni concetti: è il caso delle funzioni reciproca e inversa. Gli studenti fanno spesso confusione fra i due operatori, non sempre per loro colpa perché in realtà ci sono diversi motivi che portano a questa confusione.

Le attività di questo capitolo sono sequenziali: quasi tutte le schede di lavoro fanno riferimento a file costruiti nelle attività precedenti, richiamando nomi di funzioni e di punti definiti in quei file. Le attività del paragrafo 2 richiamano anche i file del paragrafo 1.

Non vengono trattate in questo paragrafo trasformazioni quali le simmetrie rispetto agli assi, alla bisettrice di questi e all'origine, le traslazioni, i cambiamenti di scala: tali trasformazioni sono ormai presenti su quasi tutti i libri di testo e dovrebbero essere affrontate prima di svolgere le attività presenti in questo capitolo. L'introduzione ad esse è presente comunque nel capitolo 4 del primo volume.

I nodi concettuali che verranno qui affrontati riguardano:

- funzione;
- proprietà del reciproco di un numero;
- proprietà qualitative del reciproco di una funzione;
- proprietà qualitative della funzione inversa.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico.
- Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

- Lo studente studierà le funzioni f(x) = $|x|$, f(x) = a/x, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Lo studente apprenderà ad operare con i numeri: naturali, interi, razionali, sotto forma frazionaria e decimale, irrazionali e, in forma intuitiva, reali; ordinamento e loro rappresentazione su una retta.
- Lo studente apprenderà ad analizzare le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Utilizzerà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.). Studierà funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa). (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*).

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Lo studente saprà utilizzare il linguaggio ed i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative.
- Lo studente saprà rappresentare in un piano cartesiano e studiare le funzioni f(x)= a/x, f(x) = ax, f(x) = log x. Saprà descrivere le proprietà qualitative di una funzione e costruirne il grafico. (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*).

Uno sguardo a GeoGebra

Comandi GeoGebra con inserimenti nella barra apposita:

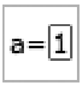
Divisione	Divisione tra numeri o tra polinomi	Il Comando *Divisione* restituisce una lista in cui il primo termine è il quoziente e il secondo termine il resto della divisione: Divisione[dividendo,divisore] restituisce Lista$n$={quoziente,resto} dove n è la numerazione progressiva delle liste definite da GeoGebra. Il numero n viene inserito in automatico a meno che non si assegni un nome diverso alla lista. Esempi: • Divisione[14,3] restituisce lista1={4,2} nella Vista Algebra; • Divisione[x^2+1,x+1] restituisce lista2={x−1,2} nella Vista Algebra e disegna i grafici di y=x−1 e y=2 nella Vista Grafica; • risultato=Divisione[34,5] restituisce risultato={6,4}.

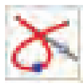
Curva	Rappresentazione di curva implicita (polinomiale) o parametrica	1. CurvaImplicita[f(x,y)] permette di definire l'equazione di una curva in forma implicita purché sia espressa in forma polinomiale. Esempio: CurvaImplicita[y^3-x] restituisce nella Vista Algebra $-x+y^3=0$ e ne traccia il grafico nella Vista Grafica. 2. Curva[x(parametro),y(parametro),parametro,valore_iniziale_parametro,valore_finale_parametro] permette di definire una curva attraverso le coordinate parametriche. Esempio: Curva[2*cos(t),4*sin(t),t,-pi,pi] restituisce un sistema di equazioni in *t* nella Vista Algebra e disegna un ellisse nella Vista Grafica (al posto di *pi* può essere inserito direttamente π).

Proprietà degli oggetti GeoGebra:

Avanzate	Tasto destro mouse Proprietà/Avanzate/Posizione	Consente di selezionare se un oggetto deve comparire nella Vista Grafica principale o nella Vista Grafica 2 o in entrambe.

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Campo di inserimento	

Strumenti	*Icone*
Luogo	

OSSERVAZIONE 1 GeoGebra possiede due viste grafiche: la Vista Grafica che si apre in genere all'avvio di GeoGebra e la Vista Grafica 2 che può essere aperta all'occorrenza. Le due viste grafiche possono operare in modo indipendente oppure alcuni oggetti possono esser condivisi. In particolare, nel caso di condivisione, a partire da uno stesso oggetto (ad esempio un punto) possono essere fatte due costruzioni differenti nelle due diverse viste grafiche. Il trascinamento dell'oggetto in una delle due modifica contemporaneamente le due costruzioni.

OSSERVAZIONE 2 La lista è un insieme ordinato di oggetti omogenei: numeri, coordinate, ecc. Gli oggetti vengono rappresentati all'interno di due parentesi graffe (*AltGr [* e *AltGr]*, oppure se non presenti in tastiera, realizzabili con *Alt 123* e *Alt 125*).

OSSERVAZIONE 3 In GeoGebra è possibile scrivere l'equazione implicita di una curva soltanto se essa è un'equazione polinomia. Ad esempio $y^5-3x=0$ viene accettata, ma non così $y+\sin(x)=0$ per la quale si ha una segnalazione di errore. Per ovviare a questo inconveniente in alcuni casi è possibile utilizzare le equazioni parametriche delle curve.

Per inserire curve polinomiali in forma implicita ci sono due possibilità:

1. Usare il comando *CurvaImplicita*, dove l'argomento è $f(x,y)$, ma non va inserito lo 0;
2. Inserire direttamente l'equazione $f(x,y)=0$.

In genere il risultato è identico. La cosa cambia solo per le equazioni di secondo grado. In questo caso la modalità 2 restituisce nella Vista Algebra una conica e non una curva implicita.

OSSERVAZIONE 4 In alcuni casi è necessario definire una funzione solo in un intervallo. Questo può essere fatto definendola con le coordinate parametriche oppure utilizzando il comando *Se*.

Esempi:

f(x)=se [x>3,x^2] rappresenta il tratto di parabola per valori di x>3;

f(x)=se [x>-π/2 ∧ x<π/2,sin(x)] rappresenta la funzione seno nell'intervallo aperto]-π/2, π/2[.

1. L'operatore reciproco[1]

L'operatore reciproco può essere utilizzato anche senza conoscere i limiti, ad esempio per introdurre l'iperbole equilatera. Senza conoscere i limiti, infatti, ma semplicemente analizzando quale trasformazione si opera nel passaggio dal grafico di una funzione lineare quello della sua reciproca, è possibile disegnare non solo l'iperbole equilatera avente come asintoti gli assi cartesiani, solitamente vista come legata alla proporzionalità inversa, ma quella più generale con gli asintoti paralleli a questi ultimi.

Un altro momento in cui l'operatore reciproco riveste un ruolo importante è nella trigonometria con il passaggio da seno, coseno, tangente a cosecante, secante, cotangente.

A seconda della classe è possibile comunque far individuare la funzione reciproca di tutte le funzioni fondamentali via via introdotte.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** relazioni e funzioni, aritmetica e algebra.
- **Obiettivi:**
  - comprendere il significato di reciproco;
  - conoscere le caratteristica del grafico della funzione reciproca di una funzione data;
  - disegnare il reciproco di un grafico dato;
  - disegnare il grafico di una iperbole equilatera con gli assi paralleli agli assi cartesiani.
- **Ordine di scuola:**
  - primo e secondo biennio scuola secondaria di II grado.
- **Descrizione attività:**
  - Dopo una attività di ripasso (Attività 1) si propone di costruire, utilizzando GeoGebra, il grafico del reciproco di una funzione di cui si conosce l'equazione (Attività 2). Si guida l'osservazione attraverso la traccia del punto che genera la funzione reciproco e l'analisi delle proprietà della funzione espressa come reciproco di quella di partenza. Si chiede poi di fare alcune osservazioni su invarianti (per questo viene richiesto di disegnare le rette y= ±1) e verifiche di proprietà del reciproco.
  - Gli studenti devono poi individuare "regole" per disegnare il reciproco di una funzione, noto il suo grafico ma non l'equazione (Attività 3).

[1] Schede di A. Sargenti.

- L'Attività 4 guida alla scoperta del grafico di una iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani.
- Infine l'Attività 5 prende spunto da un problema dell'Esame di Stato per il Liceo Scientifico[2]: propone di disegnare il grafico di una funzione particolare chiamata Versiera di Agnesi senza o comunque prima di fare uno studio della curva attraverso le derivate.

• **Indicazioni metodologiche:**

- L'Attività 1 dovrebbe essere svolta individualmente e poi discussa con la classe. È un prerequisito indispensabile per poter svolgere le successive attività.
- Per l'Attività 2 sarà il docente a scegliere la funzione a seconda della classe e delle conoscenze degli studenti. Nel primo biennio ad esempio ci si potrà limitare ad un'equazione del tipo $f(x)=mx$ per passare nel secondo biennio a $f(x)=mx+q$; nel momento in cui vengono affrontate le funzioni trigonometriche potrà essere analizzato il loro reciproco. Il docente potrà decidere se analizzare anche altri tipi di funzione: quadratica, esponenziale, logaritmica. Per agevolare l'inserimento di funzioni diverse può essere utilizzato un Campo di inserimento. Prima di analizzare la funzione reciproca attraverso la sua equazione, si può anche far scoprire il grafico determinando il luogo del punto Q al variare di P, essendo P un punto del grafico della funzione mentre Q avrà la stessa ascissa di P e ordinata reciproca di quella di quest'ultimo punto. L'analisi delle proprietà riguarda quanto accade nel passaggio dalla funzione alla sua reciproca per l'andamento, il segno, e quindi gli zeri, per eventuali simmetrie o periodicità. È bene che il docente sistematizzi le Attività 2 e/o 3 prima dello svolgimento dell'Attività 4.
- Per poter svolgere l'Attività 4 gli studenti devono saper fare la divisione tra polinomi e conoscere le trasformazioni elementari, in particolare le equazioni di traslazioni e il cambiamento di scala.
- Infine nell'Attività 5 viene proposto di disegnare la versiera di Agnesi partendo dal reciproco del grafico di una parabola a cui deve seguire un cambiamento di scala nella direzione di y. L'approccio si svincola dallo studio classico di una funzione senza necessariamente far ricorso a queste ultime: utilizzando strategie alternative si riescono ad avere informazioni sull'andamento del grafico stesso.

• **Tempi:**

- Attività 1, 3, 4, 5: 30 minuti ciascuna.
- Attività 2: 1 ora.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5.

Per ogni attività sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Sai dire che cosa è il reciproco *di un numero?*

È sempre possibile trovare il reciproco di un numero?

[2] Problema 2, Esame di Stato Liceo Scientifico - Prova di Matematica corso di ordinamento - 20 giugno 2013.

a. Inserisci al posto dei puntini un segno di disuguaglianza < o > opportuno.

$$-\frac{7}{5}\ldots-\frac{11}{10}\ldots 1\ldots\frac{7}{3}\ldots\frac{14}{3}\ldots 5$$

b. Scrivi ora il reciproco di ciascun numero al punto (a), inserendo tra uno e l'altro l'opportuno segno di disuguaglianza.

Che cosa osservi?

c. Come prima, inserisci al posto dei puntini un segno di disuguaglianza < o > opportuno.

$$-1\ldots-\frac{3}{10}\ldots-\frac{1}{5}\ldots\frac{3}{8}\ldots\frac{2}{5}\ldots\frac{1}{2}$$

d. Scrivi ora il reciproco di ciascun numero al punto (c), inserendo tra uno e l'altro l'opportuno segno di disuguaglianza.

Che cosa osservi?

Come sono in valore assoluto i numeri al punto (a), maggiori, minori o uguali 1? e i loro reciproci al punto (b)?

Come sono in valore assoluto i numeri al punto (c)? e i reciproci al punto (d)?

Che cosa si osserva nel passaggio da un gruppo di numeri ai reciproci per quanto riguarda l'ordinamento? In particolare qualcosa rimane invariato? Qualcosa si modifica? Motiva algebricamente la risposta.

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Inserisci nella barra di inserimento l'equazione di una funzione $f(x)$ indicata dall'insegnante.

Inserisci un punto A sull'asse x (NOTA: muovi il punto per assicurarti che si muova proprio sull'asse delle ascisse).

Definisci un punto P che abbia la stessa ascissa di A, che stia sul grafico della funzione e che la descriva al variare di A sull'asse x.

Definisci un punto Q con la stessa ascissa di P, ma con ordinata reciproca dell'ordinata di P.

Per scoprire il legame grafico tra P e Q, seleziona *Traccia* tra le proprietà di Q. Attribuisci a Q un colore differente da quello di P.

Muovendo A, il punto P ha sempre un corrispondente Q? Motiva la risposta dal punto di vista algebrico.

La traccia del punto Q genera il grafico di una funzione? Perché?

Determina ora il luogo di Q al variare di P e confronta i due grafici. Analizza il segno della funzione $f(x)$. Che cosa si può dire del segno del luogo?

Analizza l'andamento della funzione $f(x)$: stabilisci in quali intervalli cresce, decresce, è stazionaria. Che cosa si può dire del luogo?[3]

Nascondi ora il luogo e disegna la funzione "reciproco" inserendo l'equazione $g(x)$=…

Disegna quindi le rette y=1 e y= -1.

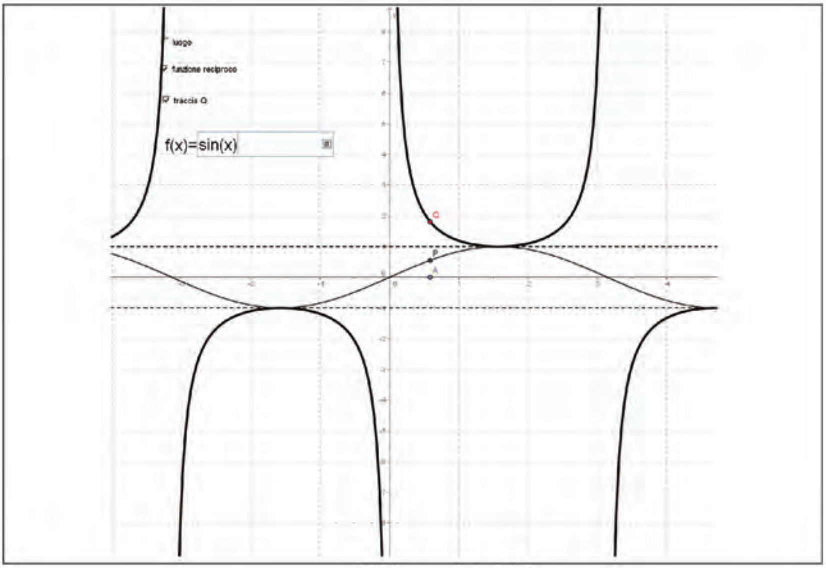
I due grafici, quello di $f(x)$ e quello di $g(x)$, hanno punti in comune? Se sì quali? Fornisci una spiegazione algebrica alla tua risposta.

Le due rette y=1 e y=-1 rivestono un ruolo importante nella trasformazione del grafico di $f(x)$ in quello di $g(x)$ Quale? Motiva la risposta algebricamente.

Inserisci ora per $f(x)$ altre funzioni e procedi come fatto precedentemente.

Avendo osservato come avviene il passaggio dal grafico di una funzione a quella della funzione reciproco, puoi individuare proprietà comuni a tutti gli esempi analizzati?

Salva il file con il nome *reciproco*.



Videata Attività 2

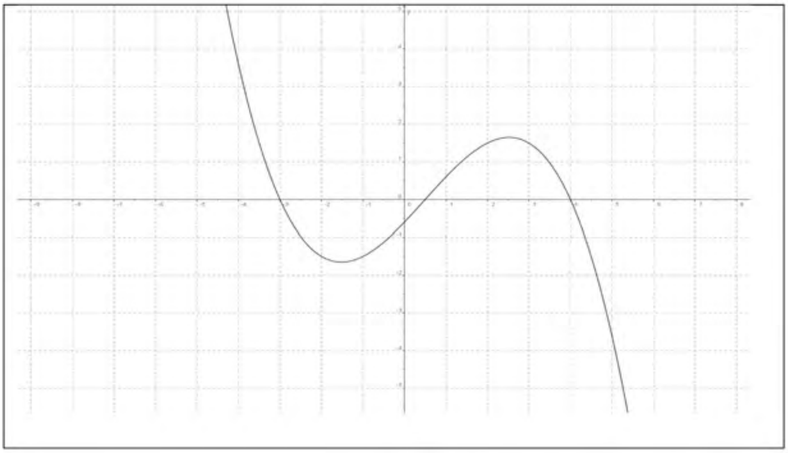
[3] Se la scheda viene proposta in una classe in cui gli studenti sanno già calcolare le derivate si può chiedere di motivare la risposta analizzando il legame tra la derivata di $f(x)$ e quella della sua reciproca. Infatti la derivata di $\dfrac{1}{f(x)}$ è $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Scheda per lo studente Attività 3

Le proprietà individuate nel passaggio tra una funzione e la sua reciproca hanno corrispondenze con quanto osservato nell'Attività 1? Quali?

Prova a formulare alcuni criteri generali perché, dato il grafico di una funzione di cui non è nota l'equazione, si possa disegnare il grafico della funzione reciproco.

Applica poi questi criteri al grafico sottostante per trovare il grafico del reciproco.



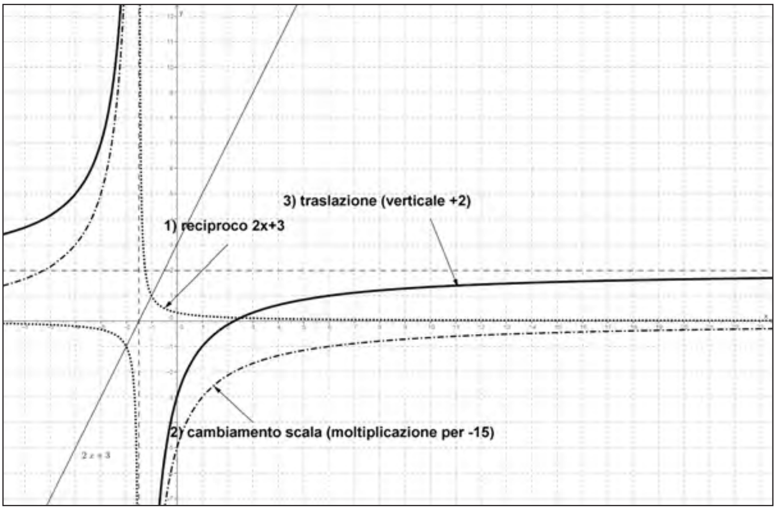
Scheda per lo studente Attività 4

Utilizza quanto appreso sul reciproco per disegnare la funzione $f(x) = \dfrac{4x-9}{2x+3}$ senza utilizzare GeoGebra o altri strumenti informatici.

Poiché la funzione rappresenta un quoziente, inizia ad eseguire la divisione. Scrivi ora la funzione in altro modo, ricordando che se $a = \dfrac{b}{c}$ allora $a = quoziente\_intero + \dfrac{resto}{c}$.

Analizza quindi la nuova espressione algebrica di $f(x)$, individuando tutti i tipi di trasformazioni che ti consentono di disegnarne il grafico.

Al termine usa GeoGebra per disegnare il grafico di $f(x)$ e controlla se coincide con quello disegnata da te in precedenza.



Videata Attività 4

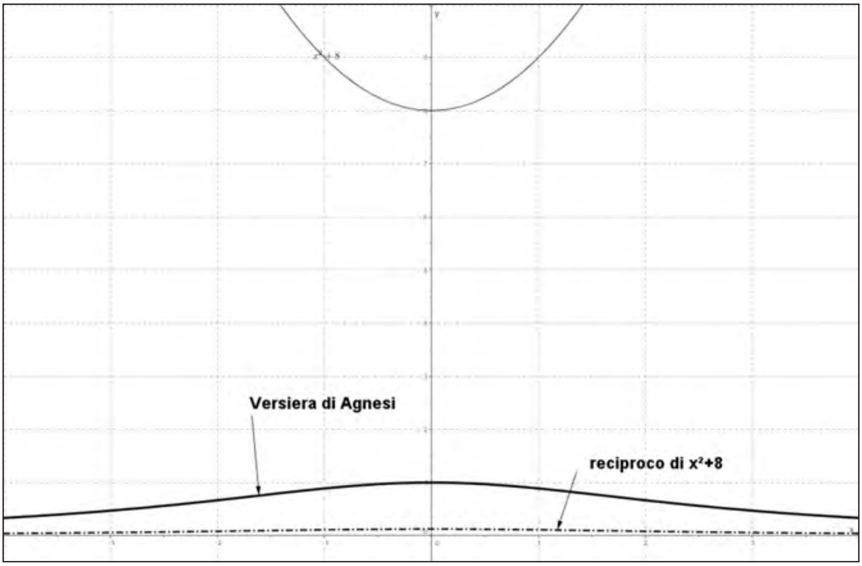
Scheda per lo studente Attività 5

In una prova dell'Esame di Stato era richiesto lo studio di una particolare funzione nota con il nome di versiera di Agnesi (da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, 1718-1799).

La funzione definita, per tutti gli x reali, è $f(x) = \dfrac{8}{4 + x^2}$.

Utilizza quanto hai scoperto sul grafico del reciproco di una funzione ed un opportuno cambiamento di scala per disegnare la versiera.

Dopo averla disegnata su carta, controlla la correttezza del tuo grafico con GeoGebra.



Videata Attività 5

2. L'operatore inversione[4]

Si è scelto di parlare di *inversione* anziché di *inverso* per mettere in evidenza il delicato passaggio da una funzione alla sua inversa, cosa che non è spesso possibile se non limitando il dominio della funzione di partenza. Le schede quindi affrontano due passaggi logici:

1. l'inversione del grafico ottenuta con lo scambio delle variabili, ovvero con la simmetria rispetto alla bisettrice principale;
2. la ricerca della limitazione del dominio che ci consente di invertire la funzione.

Un aspetto problematico, legato a GeoGebra, è però insito nello scambio di variabili. Questo risulta in genere possibile se le equazioni sono di tipo polinomiale. Non funziona invece in altri casi. È quindi necessario introdurre le equazioni parametriche, che consentono di aggirare questo ostacolo.

Il primo caso interessante da analizzare si presenta al momento dello studio della parabola. Successivi campi di analisi possono essere le funzioni trigonometriche e l'esponenziale. Possono anche essere naturalmente analizzate funzioni più articolate di quelle elementari.

Ma cerchiamo di fare chiarezza su una confusione che spesso viene fatta tra reciproco e inverso.

Nel biennio il reciproco viene introdotto in genere all'interno dell'operazione di prodotto in Q: se ne dà quindi una definizione strutturale, ovvero *l'elemento inverso di un numero* $a \neq 0$ *è quel numero* b *tale che* $a \cdot b = 1$; b è quello che comunemente viene chiamato reciproco.

Più avanti l'uso delle calcolatrici crea confusione nel simbolo $^{-1}$ usato talvolta con il significato di potenza (e quindi reciproco se applicato a numeri) o con il significato funzionale (e quindi inverso se applicato a funzioni). Classico esempio è $\sin^{-1}x$.

Per capire allora le differenze, dopo aver costruito le due trasformazioni singolarmente, ne verrà fatta una comparazione.

[4] Schede di A. Sargenti.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** relazioni e funzioni.
- **Obiettivi:**
  - comprendere il significato di inverso;
  - sapere come la caratteristica di un grafico viene trasformata nel grafico dell'inversione;
  - saper disegnare l'inverso di un grafico dato;
  - saper distinguere il concetto di reciproco da quello di inverso.
- **Ordine di scuola:**
  - Attività 1, 2, 4 e 5: primo e secondo biennio scuola secondaria II grado.
  - Attività 3 e 6: secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività:**
  - Attività 1: riflessione/ripasso sull'inversione di una funzione, sulla possibilità di eseguirla, sui limiti imposti.
  - Attività 2: inversione della funzione x^2-4 e discussione sul grafico ottenuto, prima attraverso la traccia, poi come luogo ed infine attraverso l'equazione. Propedeutica a questa è l'attività 2 del paragrafo 1.
  - Attività 3: inversione della funzione sin x e discussione sul grafico ottenuto, prima attraverso la traccia, poi come luogo ed infine attraverso l'equazione. Propedeutica a questa è l'attività 2 del paragrafo 1.
  - Attività 4: individuazione delle caratteristiche comuni alle trasformazioni che portano all'inversione, con esercizio di applicazione.
  - Attività 5: inversione e restrizione del dominio per ottenere una funzione.
  - Attività 6: comprensione del simbolo $^{-1}$, utilizzato, a seconda del contesto, con il significato di reciproco o di inverso.
- **Indicazioni metodologiche:**
  - Dopo un lavoro di recupero dei concetti e delle proprietà relativi all'inversione con l'Attività 1, ci si propone di costruire, utilizzando GeoGebra, il grafico dell'inversione di una funzione di cui si conosce l'equazione (Attività 2 e 3). Si può proporre di partire dall'equazione di una parabola (Attività 2) per giungere quindi al problema della radice, operatore inverso dell'elevamento a potenza, che nel caso dell'esponente n = 2 non porta ad una funzione. L'osservazione viene guidata attraverso la traccia del punto che genera l'inversione, eventualmente il luogo del punto, e quindi la curva nella cui equazione si è operata una inversione delle variabili rispetto a quella di partenza. Dopo aver osservato il fatto che non sempre si ottiene una funzione, si chiede di fare alcune osservazioni su invarianti e proprietà. In particolare verrà messa in evidenza la simmetria assiale rispetto alla bisettrice principale. Ci si può chiedere: positività/negatività vengono mantenute? Si mantiene l'andamento della funzione? Ci sono elementi uniti? La parabola può essere campo di investigazione nel primo biennio, mentre nel secondo si può anche analizzare la funzione sinusoidale (Attività 3).

Le due schede sono praticamente identiche. Tuttavia l'Attività 3 differisce dalla 2 per il fatto che nel primo caso è possibile fare l'inversione semplicemente scambiando le variabili nell'equazione; nell'Attività 3 invece è necessario introdurre le equazioni parametriche, non essendo la funzione polinomiale (Osservazione 3).

- Nell'Attività 4 viene richiesto di individuare come si passa graficamente da una funzione, di cui non si conosce necessariamente l'equazione, alla sua inversione, magari prima provando con altre funzioni oltre a quelle proposte nelle attività precedenti. Le proprietà serviranno per svolgere su carta l'esercizio proposto.
- A questo punto (Attività 5) risulta necessario parlare di *funzione inversa*, restringendo il dominio della funzione di partenza in modo che quest'ultima sia iniettiva ed individuando l'intervallo immagine, con il quale verrà definito il dominio della funzione inversa. Per far questo distinguiamo se operiamo con funzioni parametriche o meno. Nel primo caso basterà porre la limitazione al parametro; nell'altro caso dovrà essere utilizzata una funzione definita in un intervallo (Osservazione 4).
- L'Attività 6 si propone di superare eventuali misconcetti derivanti da una notazione ambigua per reciproco (in genere di un valore numerico) ed inverso (in genere di una funzione). La notazione che si trova infatti su molte calcolatrici confonde le due cose attraverso la rappresentazione con l'elevamento $^{-1}$. È opportuno allora trovare in classe qualche studente che abbia una calcolatrice ad esempio con i tasti x^{-1} e $\sin^{-1}$.

  Utilizzando entrambe le viste grafiche, si potrà poi fare un'analisi comparata dei due tipi di grafici (reciproco e inverso) per differenti funzioni, mettendo in evidenza che si tratta di due trasformazioni distinte, con caratteristiche diverse. Proprio per giungere a questa comparazione è stato indicato l'uso dello stesso file (*reciproco_inversione*) costruito inizialmente per il reciproco e successivamente integrato con l'inversione nella Vista Grafica 2.

- **Tempi:**
  - Attività 1, 4: 20 minuti ciascuna
  - Attività 2, 3: 40 minuti ciascuna
  - Attività 5, 6: 30 minuti ciascuna

Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Per le Attività sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Completa le seguenti tabelle riferite alla relazione $y=x^2$

x	y
- 2	
- 3/2	
-1	
0	
1/2	
2.4	
3	
A	

x	y
	0
	4/9
	1
	1.44
	4
	4.41
	9
B	

Quale operazione è necessario fare per passare da una colonna all'altra nella tabella A? Tutti i valori hanno un corrispondente? Perché? Uno ed uno solo?

Quale operazione è necessario fare per passare da una colonna all'altra nella tabella B? Tutti i valori hanno un corrispondente? Perché? Uno ed uno solo?

Il procedimento seguito nella tabella B è poco usuale. In genere noi *assegniamo* valori alla variabile indipendente x e poi *calcoliamo* i corrispondenti valori della variabile y. Riscrivi allora la stessa tabella tenendo presente quanto appena osservato (tabella C). Quale equazione puoi scrivere per rappresentare il legame tra x e y?

x	y
0	
4/9	
1	
1.44	
4	
4.41	
9	
C	

La relazione rappresentata nella tabella A è una funzione? Perché?

La relazione rappresentata nella tabella C è una funzione? Perché?

Il procedimento seguito per costruire la tabella C ha portato allo scambio tra x e y: per questo parliamo di **inversione.** Invertendo le variabili di una funzione troviamo la sua funzione inversa? Perché?

Scheda per lo studente Attività 2

Apri il file *reciproco*.

Per la funzione $f(x)$, per i punti A e P e per l'eventuale casella di inserimento ripeti le seguenti operazioni:

- apri la finestra di dialogo delle *Proprietà* e scegli *Avanzate*;
- verso il fondo della scheda trovi scritto *Vista Grafica* e *Vista Grafica 2*;
- spunta entrambe.

Questo ti consentirà di avere gli oggetti contemporaneamente nelle due Viste Grafiche.

Attiva ora la Vista Grafica 2 con gli assi e chiudi la Vista Grafica principale.

Introduci per $f(x)$ l'espressione $x^2 - 4$.

Definisci un punto R con ascissa l'ordinata di P, e con ordinata l'ascissa di P (inversione).

Per scoprire il legame grafico tra P e R, seleziona *Traccia* tra le proprietà di R. Attribuisci a R un colore differente da quello di P.

Muovendo A, il punto P ha sempre un corrispondente R? Motiva la risposta.

La traccia del punto R genera il grafico di una funzione? Perché? Per analizzare meglio il comportamento puoi tracciare una curva definendo il luogo di R al variare di A: *Luogo*[R,A].

Il grafico può anche essere determinato attraverso l'inversione[5], ovvero inserendo l'equazione x =… (ricorda che la funzione iniziale può essere scritta come $y= x^2-4$; quindi pensando a come è stato costruito il punto R …)

Disegna la retta $y=x$ che è ……

I due grafici, quello di $f(x)$ e quello dell'inversione hanno punti in comune? Se sì quali? Spiega algebricamente il motivo della risposta.

La retta $y=x$ riveste qualche ruolo nella trasformazione del grafico della parabola in quello della sua inversione? Se sì quale? Motiva la risposta algebricamente.

Salva il file con il nome *reciproco_inversione_parabola*.

Scheda per lo studente Attività 3

Apri il file *reciproco*.

Per la funzione $f(x)$, per i punti A e P e per l'eventuale casella di inserimento ripeti le seguenti operazioni:

[5] Questa operazione è possibile perché la particolare equazione di $f(x)$ è polinomia.

- apri la finestra di dialogo delle *Proprietà* e scegli *Avanzate*;
- verso il fondo della scheda trovi scritto Vista Grafica e Vista Grafica 2;
- spunta entrambe.

Questo ti consentirà di avere gli oggetti contemporaneamente nelle due Viste Grafiche.

Attiva ora la Vista Grafica 2 con gli assi e chiudi la Vista Grafica principale.

Introduci per $f(x)$ l'espressione $\sin(x)$.

Definisci un punto R con ascissa l'ordinata di P, e con ordinata l'ascissa di P (inversione).

Per scoprire il legame grafico tra P e R, seleziona *Traccia* tra le proprietà di R. Attribuisci a R un colore differente da quello di P.

Muovendo A, il punto P ha sempre un corrispondente R? Motiva la risposta.

La traccia del punto R genera il grafico di una funzione? Perché? Per analizzare meglio il comportamento puoi tracciare una curva definendo il luogo di R al variare di A: *Luogo*[R,A].

Con GeoGebra non è possibile operare l'inversione delle variabili quando l'equazione, come in questo caso, non è polinomiale. L'ostacolo viene aggirato introducendo le equazioni parametriche, ovvero un sistema di equazioni in cui le variabili x e y vengono espresso tramite un parametro, che indicheremo con t.

- equazione data $y = \sin x$;
- equazioni parametriche associate $\begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases}$

  che sono evidentemente equivalenti all'equazione precedente;
- equazioni parametriche dell'inversione $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \end{cases}$.

C'è da aggiungere che il parametro t deve variare in un intervallo definito. Quindi puoi scrivere nella Barra di inserimento il comando:

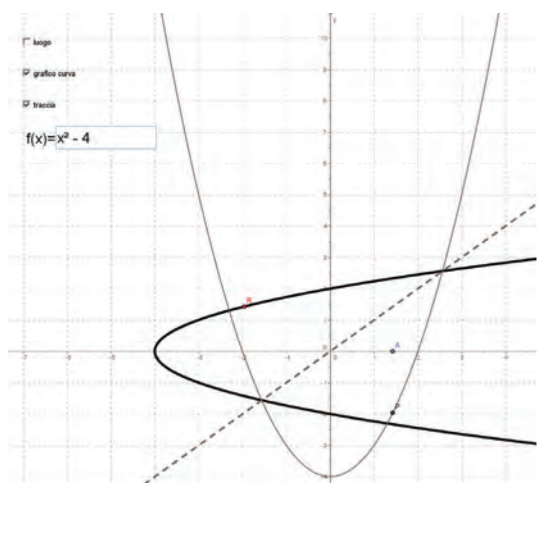
Curva [Espressione di x in funzione del parametro, Espressione di y in funzione del parametro, Nome del parametro, Valore iniziale parametro, Valore finale parametro].

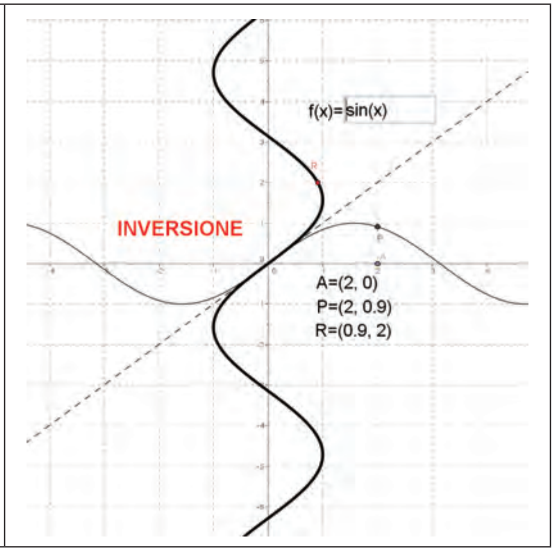
Disegna la retta $y=x$ che è ……

I due grafici, quello di $f(x)$ e quello dell'inversione hanno punti in comune? Se sì quali? Spiega algebricamente la tua risposta.

La retta $y=x$ riveste qualche ruolo nella trasformazione del grafico della parabola in quello della sua inversione? Se sì quale? Motiva la risposta algebricamente.

Salva il file con il nome *reciproco_inversione_seno*.





Videate Attività 2 e 3

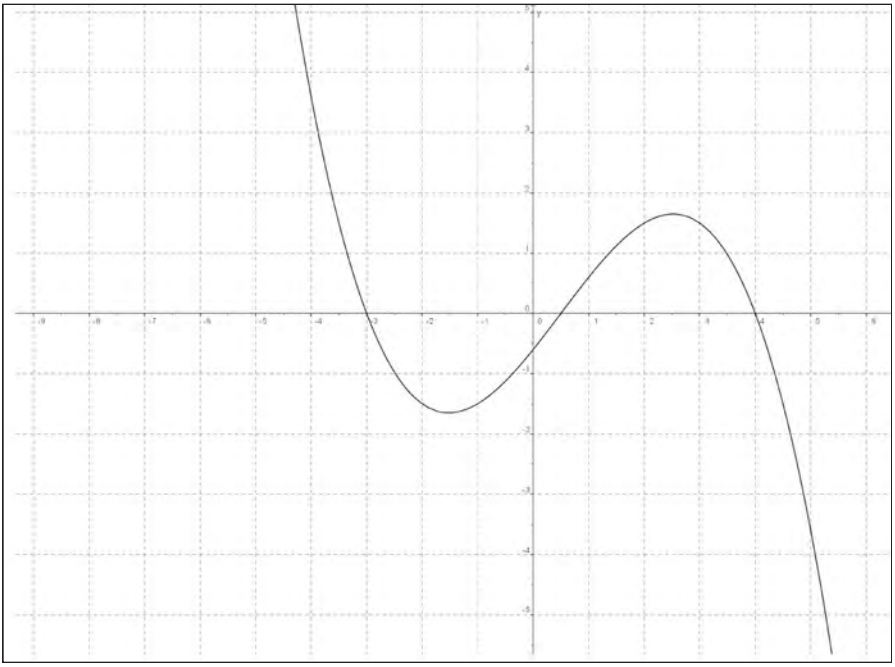
Scheda per lo studente Attività 4

Apri uno dei due file *reciproco_inversione* (a seconda di quel che hai fatto, *parabola* o *seno*) e opera nella Vista Grafica 2 per analizzare l'inversione per altre funzioni a te note o che ti vengono indicate dal docente.

Le proprietà individuate nel passaggio tra una funzione e la sua inversione hanno corrispondenza con quanto osservato nell'attività 1? Quali?

Prova a formulare alcuni criteri generali perché, dato il grafico di una funzione di cui non è nota l'equazione, si possa disegnare il grafico della sua inversione.

Applica poi questi criteri al grafico sottostante per trovare il grafico dell'inversione.



Scheda per lo studente Attività 5

Apri il file *reciproco_inversione_parabola* ed opera nella Vista Grafica 2.

Inserisci la funzione $f(x)=x^2$.

L'inversione restituisce ancora una funzione? Motiva la risposta.

Se non è una funzione, come puoi intervenire per renderla tale? Ricorda le proprietà di una funzione.

Apri allora un nuovo file con la Vista Grafica in cui inserirai la funzione $f(x)=x^2$.

Modifica allora opportunamente:

- l'intervallo su cui si deve muovere A, in questo caso una semiretta;
- il dominio della funzione $f(x)$, definendo la funzione attraverso il comando *Se*;
- il codominio della curva ottenuta per inversione, scritta in forma parametrica.

Inserisci quindi come prima i punti P (sulla funzione x^2) e R (sulla sua inversa) che vengono controllati dal movimento di A. Controlla se i grafici ottenuti sono effettivamente una funzione.

Salva il file con il nome *inverso_ parabola*.

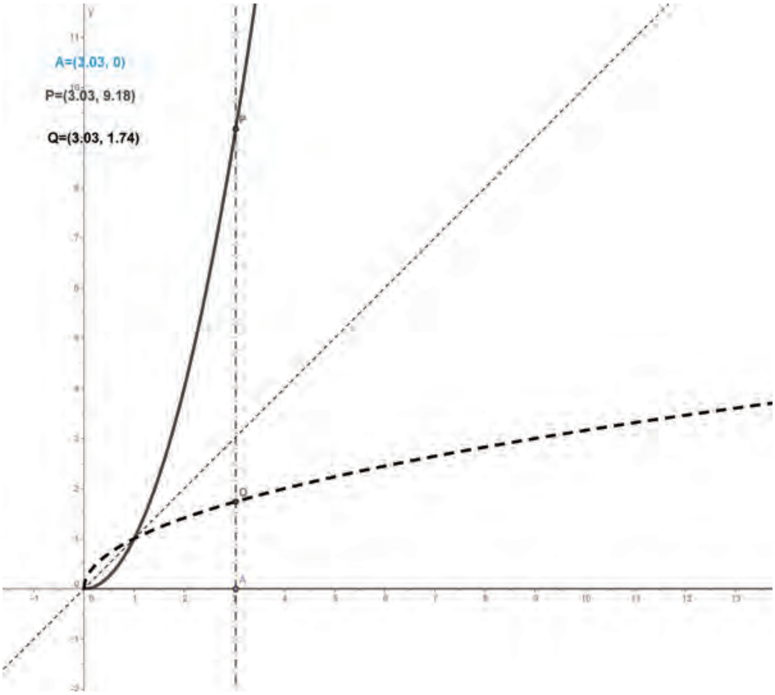
Modifica ora la funzione in $f(x)=\sin x$.

Come prima modifica opportunamente:

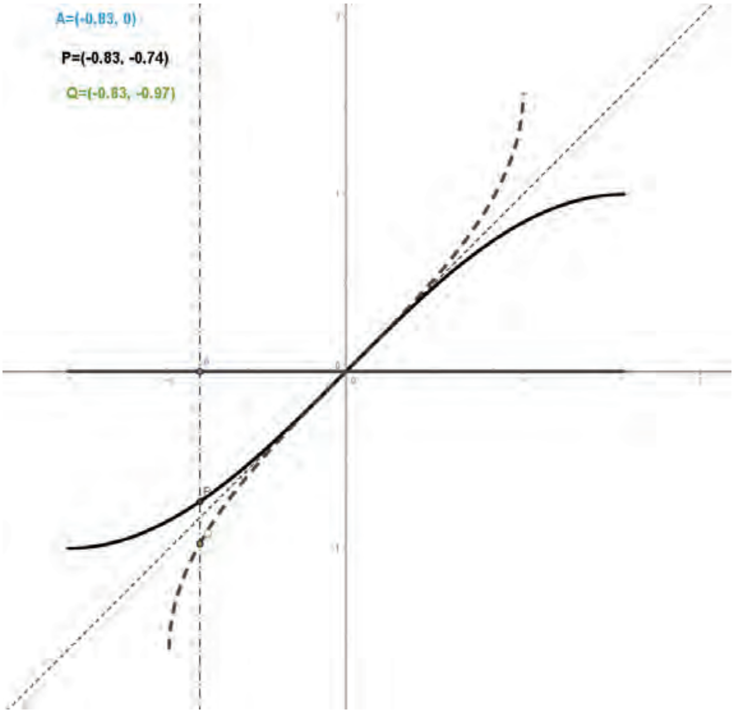
- l'intervallo su cui si deve muovere A, in questo caso un segmento;
- il dominio della funzione $f(x)$, definendo la funzione attraverso il comando *Se*;
- il codominio della curva ottenuta per inversione, scritta in forma parametrica.

Inserisci quindi come prima i punti P (sulla funzione sin x) e R (sulla sua inversa) che vengono controllati dal movimento di A. Controlla se i grafici ottenuti sono effettivamente una funzione.

Salva il file con il nome *inverso_sinusoide*.



Videata Attività 5_1



Videata Attività 5_2

Scheda per lo studente Attività 6

Usa una calcolatrice scientifica. Dovresti avere i tasti x^{-1} e $\sin^{-1}$.

Nel caso in cui questi due tasti non ci fossero, esegui la prima parte dell'esercizio con un tuo compagno la cui calcolatrice abbia questi tasti.

Inserisci il numero 0.2 e premi x^{-1}: che cosa ottieni? Che relazione c'è tra il numero inserito e quello ottenuto? Premi nuovamente il tasto x^{-1}: che cosa ottieni? Come opera dunque il tasto x^{-1}? Prova con altri valori: 2, -5, 10, … Se inserisci il valore 0, cosa ottieni? Perché?

Adesso, dopo aver inserito il numero 0.6, premi il tasto $\sin^{-1}$. Annota il risultato. Premi nuovamente il tasto $\sin^{-1}$: che cosa ottieni? Questo tasto ha operato sul numero in modo analogo al tasto precedente?

Riprendi il risultato ottenuto con 0.6 $\sin^{-1}$. Premi ora il tasto *sin*: che cosa ottieni?

Che relazione c'è allora tra i due tasti?

Usa altri valori per verificare se l'ipotesi che hai fatto è corretta o errata: inserisci ad esempio 0.5, 0.7, -0.8, -1, 0, 2.

Per tutti i valori indicati hai trovato un risultato? Perché?

Lascia ora la calcolatrice e ritorna a GeoGebra. Apri il file *reciproco_inversione_seno* e attiva tutte e due le Viste Grafiche.

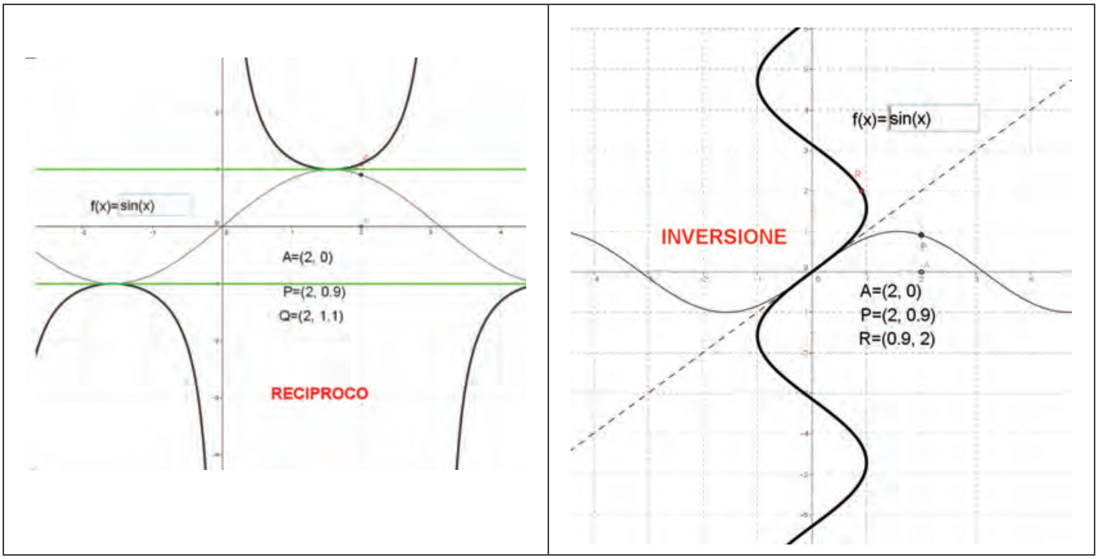
Controlla che sia inserita la funzione $f(x)$=sin(x). Osserva le due Viste Grafiche e cerca di comprendere la differenza tra i due grafici.

Muovi A. Descrivi come avresti potuto ottenere i valori di Q (punto che genera la funzione reciproca nella Vista Grafica) con la calcolatrice, in particolare quali tasti (compresi i due indicati sopra) avresti dovuto premere. Verifica la tua ipotesi.

Osserva ora la Vista Grafica 2. Muovi nuovamente A. Descrivi come avresti potuto ottenere i valori di R (punto che genera l'inversione) con la calcolatrice, in particolare quali tasti (compresi i due indicati sopra) avresti dovuto premere. Verifica la tua ipotesi.

Posiziona ora A nel punto (2,0). Qual è l'ascissa di R? è l'unico punto del grafico che ha questa ascissa? Perché? Ricorda quanto era stato fatto nel file *inverso*. Questo significa che dobbiamo limitare il dominio della $f(x)$. Come? Come corrisponde questa osservazione a quanto trovato prima con la calcolatrice quando avevi inserito il valore 2?

Dovrebbe esserti chiaro ora il significato due termini, reciproco ed inversione, e le differenze che caratterizzano gli operatori corrispondenti.



Videate Attività 6

CAPITOLO 5

Funzione potenza e funzione valore assoluto: proprietà e grafici

Introduzione

Proseguiamo qui il discorso iniziato nel capitolo precedente, analizzando particolari operatori funzionali che si incontrano frequentemente: valore assoluto, potenza, radice. Tali operatori influiscono sui grafici in modo elementare tanto che gli stessi possono essere studiati anche senza conoscenze di Analisi.

GeoGebra facilita il compito di scoperta e porta in modo abbastanza naturale ad affiancare gli aspetti algebrici degli operatori alle peculiarità geometriche che i grafici ottenuti con gli stessi evidenziano. Questo rafforza il collegamento tra i due registri che vengono invece sovente tenuti separati dagli studenti. Questo collegamento per altro contribuisce a dare senso sia alle operazioni algebriche richiamate, sia agli aspetti geometrici delle funzioni.

I file del primo paragrafo sono strettamente interconnessi fra di loro e sequenziali.

I nodi concettuali che verranno qui affrontati riguardano:

- potenze ad esponente razionale e loro proprietà;
- funzione potenza e sue proprietà qualitative;
- valore assoluto;
- funzionevalore assoluto di una funzione data e suo grafico;
- funzione del valore assoluto della variabile indipendente e suo grafico;
- concetto di distanza applicato alla risoluzione di equazioni e disequazioni con valore assoluto.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico.
- Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.
- Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Lo studente apprenderà ad operare con i numeri: naturali, interi, razionali, sotto forma frazionaria e decimale, irrazionali e, in forma intuitiva, reali; ordinamento e loro rappresentazione su una retta.
- Lo studente apprenderà ad analizzare le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Utilizzerà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.). Studierà funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa). (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*).

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Lo studente saprà descrivere le proprietà qualitative di una funzione e costruirne il grafico.
- Lo studente saprà risolvere equazioni relative alla funzione modulo, con metodi grafici o numerici e anche con l'aiuto di strumenti elettronici. (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*).

Uno sguardo a GeoGebra

Comandi GeoGebra con inserimenti nella barra apposita:

SE[condizione,a(x),b(x)]	funzione definita a tratti	Viene definita una funzione f(x) che coincide con la funzione a(x) nell'intervallo in cui la *condizione* specificata è vera, altrimenti altrove coincide con b(x).

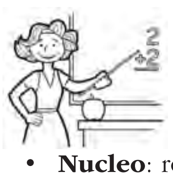
1. L'operatore potenza[1]

L'analisi dell'operatore potenza sui grafici di funzioni del tipo $f(x)=x^n$ consente di mettere in evidenza le proprietà delle potenze in relazione al dominio di n (intero positivo, intero negativo, razionale) e di introdurre alcune caratteristiche delle funzioni, quali zeri multipli, asintoti, ecc.

Lavorando sui grafici è inoltre possibile fare considerazioni su successioni di termini potenza, con base fissata.

Se il docente vuole, a partire da queste funzioni potenza può, attraverso le trasformazioni geometriche (traslazioni, simmetrie, cambiamenti di scala), far studiare una più ampia gamma di funzioni riconducibili alla forma $f(x)=a\ (mx\text{-}h)^n +k$. In questo paragrafo ci si è però limitati ad affrontare le funzioni potenza del tipo $f(x)=x^n$.

Scheda per il docente



- **Nucleo**: relazioni e funzioni, aritmetica e algebra.
- **Obiettivi**:
  - comprendere il significato di funzione potenza in relazione all'esponente;
  - sapere individuare il dominio di una funzione potenza;
  - comprendere il significato di asintoto verticale
  - comprendere il significato di asintoto orizzontale;
  - saper individuare le relazioni di disuguaglianza fra potenze di base uguale.

[1] Schede di A. Sargenti.

- **Ordine di scuola**:
  - primo e secondo biennio scuola secondaria di II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: potenze con esponente intero positivo pari. Confronto tra i vari grafici.
  - Attività 2: potenze con esponente intero positivo dispari. Confronto tra i vari grafici e con quelli dell'Attività 1.
  - Attività 3: potenze con esponente intero negativo pari. Confronto tra i vari grafici e con quelli dell'Attività 1.
  - Attività 4: potenze con esponente intero negativo dispari. Confronto tra i vari grafici e con quelli dell'Attività 2.
  - Attività 5: potenze aventi per esponente il reciproco di un intero positivo pari. Confronto tra i vari grafici e con quelli dell'Attività 1.
  - Attività 6: potenze aventi per esponente il reciproco di un intero positivo dispari. Confronto tra i vari grafici e con quelli dell'Attività 2.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - L'Attività 1 deve far riflettere su alcuni aspetti algebrici dell'elevamento a potenza con esponente intero pari evidenziandone la ricaduta sui grafici: il segno mai negativo, la concavità, i punti comuni a tutti i grafici, la simmetria, la retta delle ascisse come retta tangente (si può, se non è già stato fatto prima, dare una definizione come situazione limite in cui le intersezioni coincidono). Si può anche introdurre il concetto di molteplicità dello zero, dandone una interpretazione geometrica. Infine si introducono le relazioni di disuguaglianza tra potenze che hanno la stessa base, ovvero si crea una successione ordinata di potenze con la stessa base ed esponente intero positivo; ovvero si vuole arrivare a stabilire che se la base è, in valore assoluto, maggiore di 1 la successione è crescente; decrescente in caso contrario.
  - L'Attività 2, analoga alla precedente, affronta ancora potenze con esponente intero positivo, ma questa volta dispari. Si suggerisce di utilizzare il file precedente modificando solamente i dati nei punti in cui occorre farlo. In prima istanza inoltre, lasciando lo *slider* con valori pari, è possibile confrontare potenze pari e dispari.
  - Le Attività 3 e 4 invece affrontano anche gli aspetti più delicati legati agli asintoti (verticale e orizzontale) e al ruolo che essi rivestono. Come nel caso precedente, si può partire dai file già salvati nelle attività precedenti e modificare in modo opportuno gli inserimenti. Può essere interessante far analizzare analogie e differenze tra i grafici delle Attività 1 e 3, 2 e 4, mantenendo inizialmente lo *slider* originario. Sebbene non esplicitato direttamente nelle schede, l'insegnante può far osservare quali proprietà si conservano (ad esempio segno, simmetria,…) e quali variano (andamento, zeri, …).
  - Le Attività 5 e 6 affrontano il problema della radice, che necessita di qualche riflessione specialmente se l'indice è pari. Si può richiamare il concetto di funzione inversa (vedi capitolo precedente) evidenziando la simmetria rispetto alla bisettrice principale.
- **Tempi:**
  - 30 minuti per ciascuna delle Attività dalla 1 alla 4;
  - 45 minuti per ciascuna delle Attività 5 e 6.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Analizziamo i grafici delle potenze x^n, con n intero, *pari positivo*.

Apri in un nuovo file la Vista Grafica con gli assi cartesiani e il Foglio di calcolo.

Inserisci nelle prime tre celle della colonna A del Foglio di calcolo i numeri 2, 4, 6.

Scrivi in B1 la formula *x*^A1 e copiala in B2 e B3.

Descrivi analogie e differenze nei tre grafici ottenuti. Per comprendere meglio le caratteristiche dei singoli grafici, puoi colorare ognuno di un colore differente.

Nella Vista Grafica inserisci un punto A sull'asse x e traccia per esso la perpendicolare all'asse stesso (controlla il nome di tale retta: nel seguito la indicheremo con a).

Ritorna nel Foglio di calcolo e in C1 scrivi =Intersezione[a,B1]. Che cosa trovi in questo modo?

(NOTA: se non appare nessun punto nel grafico, evidenzia la cella e con il tasto destro del mouse seleziona *Mostra oggetto* e *Mostra etichetta*).

Copia la formula nelle celle B2 e B3.

Muovi A: c'è qualche sua posizione che mette in evidenza punti comuni alle tre curve? Se sì, che caratteristiche hanno questi punti? Motiva algebricamente il fatto.

Crea ora uno *slider n* che varia tra 2 e 20, con passo 2 (poiché stiamo trattando solo esponenti pari). Inserisci n nella cella A4 e copia in B4 e C4 le formule sovrastanti.

Muovi lo *slider*: quello che trovi mantiene le caratteristiche dei primi tre grafici?

Caratterizza questa famiglia di curve descrivendo:

- Il campo di definizione
- L'immagine
- Il segno
- La concavità
- Crescenza/decrescenza
- Le intersezioni con gli assi
- I punti in comune
- Eventuali simmetrie

L'asse delle x ha qualche funzione particolare rispetto ai grafici? Calcolando l'intersezione di una qualsiasi di queste curve con l'asse x si ottiene … che è uno zero di molteplicità …

Ricorda che l'equazione x-3=0 ha uno zero semplice x=3; nell'equazione $(x-3)^2=0$, ovvero $(x-3)\,(x-3)=0$, dove x=3 è uno zero doppio, mentre è di ordine 6 se l'equazione è ad esempio $(x-3)^6=0$.

Ricorda inoltre che se due o più intersezioni tra una retta ed una curva coincidono in un punto, parliamo di retta **tangente** alla curva in quel punto. Pertanto il punto O è un punto di tangenza per tutte le curve. Puoi osservare che più aumenta la molteplicità dello zero, più la curva si *appiattisce* sull'asse delle ascisse nell'intorno di O.

Hai analizzato le caratteristiche comuni alla famiglia di curve. Adesso sarai guidato a fare alcune osservazioni invece sulle differenze tra una curva e l'altra.

Muovi il punto A negli intervalli indicati ed osserva le ordinate dei punti C1, C2, C3, che indicheremo con $c_{1,}$ $c_{2,}$ $c_{3.}$

Mentre muovi il punto A, scrivi quale relazione esiste tra $c_{1,}$ c_2 e c_3:

- nell'intervallo]-1,0[;
- nell'intervallo]0,1[;
- nell'intervallo]-∞,-1[;
- nell'intervallo]1, +∞[;
- nei punti di ascissa -1 e 1.

In base a queste osservazioni nell'intervallo]-1,1[quale curva cresce/decresce più velocemente? E negli intervalli]-∞,-1[e]1, +∞[?

Salva il file con il nome *pari_positivo*.

Scheda per lo studente Attività 2

Analizziamo i grafici delle potenze x^n, con n intero, *dispari positivo*. Per questo utilizzerai il file *pari_positivo*, che rinominerai subito in *dispari_positivo*, per velocizzare la costruzione.

Questa volta inserisci nelle prime tre celle della colonna A del Foglio di calcolo i numeri 1, 3 e 5. Le altre celle verranno aggiornate automaticamente.

Descrivi analogie e differenze nei tre grafici ottenuti.

Muovi A: c'è qualche sua posizione che mette in evidenza punti comuni alle tre curve? Che caratteristiche hanno questi punti? Motiva algebricamente il fatto.

Come descrivi la differenza tra queste curve e quelle che ti appaiono con lo *slider*?

Modifica ora lo *slider n*, facendolo variare da 1 a 19, sempre con passo 2 (ricorda che vogliamo ottenere potenze dispari).

Muovi lo *slider*: quello che ottieni mantiene le caratteristiche dei primi tre grafici?

Potresti allora caratterizzare questa famiglia di curve descrivendo:

- Il campo di definizione
- L'immagine
- Il segno

- La concavità
- Crescenza/decrescenza
- Le intersezioni con gli assi
- I punti in comune
- Eventuali simmetrie

L'asse delle x ha qualche funzione particolare rispetto ai grafici? Calcolando l'intersezione di una qualsiasi di queste curve con l'asse x si ottiene … che è uno zero di molteplicità …

(Ricorda quanto è stato spiegato in proposito nella Attività 1. Nota anche che in questo caso, a differenza di quanto accade nelle coniche, la retta tangente, secondo la definizione che ne è stata data, "attraversa" il grafico).

Come nel caso di n pari puoi osservare che più aumenta la molteplicità dello zero, più la curva si *appiattisce* sull'asse delle ascisse nell'intorno di O. Come mai nel caso n=1 il grafico non è tangente all'asse delle ascisse?

Hai analizzato le caratteristiche comuni alla famiglia di curve. Adesso sarai guidato a fare alcune osservazioni invece sulle differenze tra una curva e l'altra.

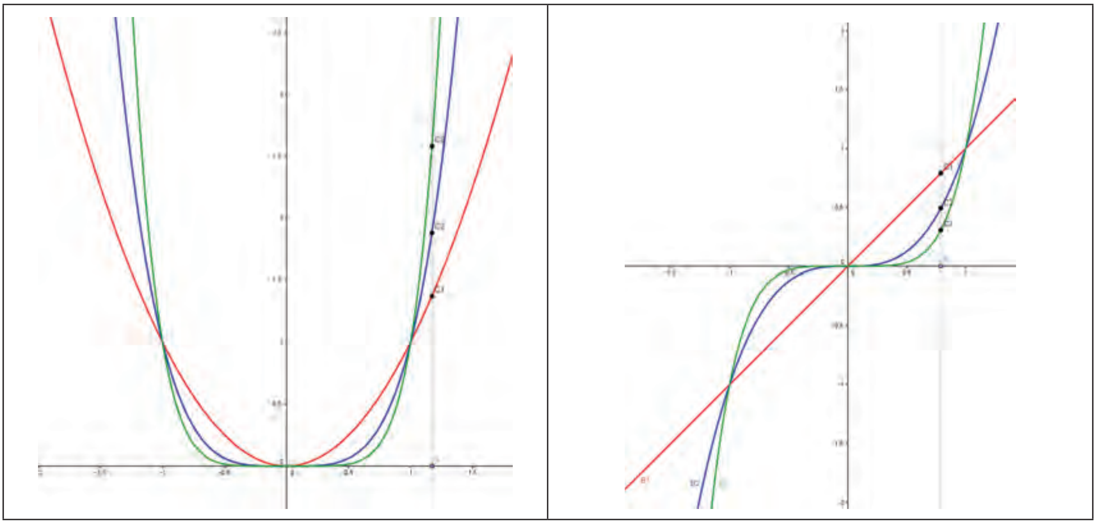
Muovi il punto A negli intervalli indicati ed osserva le ordinate dei punti C1, C2, C3, che indicheremo con c_1, c_2, c_3.

Mentre muovi il punto A, scrivi quale relazione esiste tra c_1, c_2 e c_3:

- nell'intervallo]-1,0[;
- nell'intervallo]0,1[;
- nell'intervallo]-∞,-1[;
- nell'intervallo]1, +∞[;
- nei punti di ascissa -1 e 1.

In base a queste osservazioni nell'intervallo]-1,1[quale curva cresce/decresce più velocemente? E negli intervalli]-∞,-1[e]1, +∞[?

Salva il file.



Videate Attività 1 e 2

Scheda per lo studente Attività 3

Analizziamo i grafici delle potenze x^n, con n intero, *pari negativo*. Per questo utilizzerai il file *pari_positivo*, che rinominerai subito in *pari_negativo*, per velocizzare la costruzione.

Questa volta inserisci nelle prime tre celle della colonna A del Foglio di calcolo i numeri -2, -4 e -6. Le altre celle verranno aggiornate automaticamente.

Ricorda che se $m = -n$, $x^n = \dfrac{1}{x^m}$.

Descrivi analogie e differenze nei tre grafici ottenuti.

Muovi A: c'è qualche sua posizione che mette in evidenza punti comuni alle tre curve? Che caratteristiche hanno questi punti? Motiva algebricamente il fatto.

Come descrivi la differenza tra queste curve e quelle che ti appaiono con lo *slider*? Esiste un qualche legame?

Modifica ora lo *slider n*, facendolo variare da -20 a -2, sempre con passo 2.

Muovi lo *slider*: quello che ottieni mantiene le caratteristiche dei primi tre grafici?

Potresti allora caratterizzare questa famiglia di curve descrivendo:

- Il campo di definizione
- L'immagine
- Il segno
- La concavità
- Crescenza/decrescenza
- I punti in comune
- Eventuali simmetrie

È possibile trovare la loro intersezione con l'asse y? Che cosa accade alle ordinate dei punti di intersezione con a quando A si avvicina all'origine degli assi? Perché?

Una retta che si comporta rispetto ai grafici come, in questo caso, l'asse y si chiama **asintoto verticale**.

Ci sono punti di intersezione con l'asse x? Osserva le ordinate dei punti quando i valori dell'ascissa di A diventano sempre più grandi: come puoi descrivere il comportamento del grafico rispetto all'asse delle ascisse? Perché?

Una retta che si comporta rispetto ai grafici come, in questo caso, l'asse x si chiama **asintoto orizzontale**.

Salva il file che hai costruito.

Scheda per lo studente Attività 4

Analizziamo i grafici delle potenze x^n, con n intero, *dispari negativo*. Per questo utilizzerai il file *dispari_positivo*, che rinominerai subito in *dispari_negativo*, per velocizzare la costruzione.

Questa volta inserisci nelle prime tre celle della colonna A del Foglio di calcolo i numeri -1, -3 e -5. Le altre celle verranno aggiornate automaticamente.

Descrivi analogie e differenze nei tre grafici ottenuti. Motiva algebricamente il fatto.

Come descrivi la differenza tra queste curve e quelle che ti appaiono con lo *slider*?

Muovi A: c'è qualche sua posizione che mette in evidenza punti comuni alle tre curve? Che caratteristiche hanno questi punti?

Come descrivi la differenza tra queste curve e quelle che ti appaiono con lo *slider*?

Modifica ora lo *slider n*, facendolo variare da -19 a -1, sempre con passo 2.

Muovi lo *slider*: quello che ottieni mantiene le caratteristiche dei primi tre grafici?

Potresti allora caratterizzare questa famiglia di curve descrivendo:

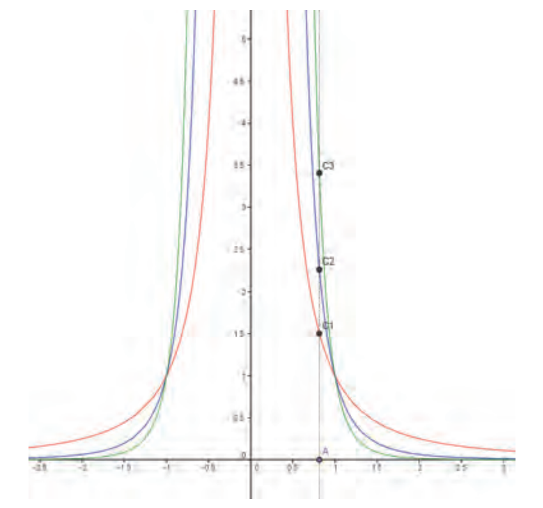
- Il campo di definizione
- L'immagine
- Il segno
- La concavità
- Crescenza/decrescenza
- I punti in comune

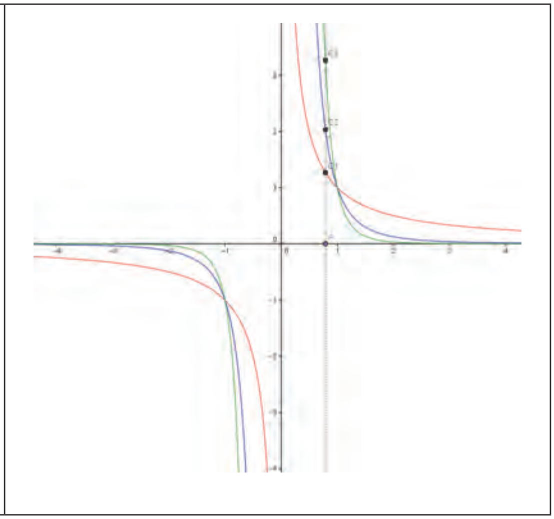
È possibile trovare la loro intersezione con l'asse y? Che cosa accade ai punti di intersezione con a quando A si avvicina all'origine degli assi? Perché? Che cosa è dunque l'asse y per i grafici? (vedi Attività 3).

Ci sono punti di intersezione con l'asse x? Come puoi descrivere il comportamento del grafico rispetto a quest'asse quando i valori dell'ascissa di A diventano sempre più grandi? Perché?

Che cosa è dunque l'asse x per i grafici? (vedi Attività 3).

Salva il file che hai costruito.





Videate Attività 3 e 4

Scheda per lo studente Attività 5

Ci proponiamo di analizzare i grafici delle potenze x^n, con n razionale, in particolare quando n=1/r con r intero positivo pari . Per questo utilizzerai il file *pari_positivo*, che rinominerai subito in *frazionario_positivo_pari*, per velocizzare la costruzione.

Ricorda che se $n = \frac{1}{r}$ allora $x^n = \sqrt[r]{x}$.
Questa volta inserisci nella cella B1 del Foglio di calcolo la formula x^(1/A1) e copiala in B2, B3 e B4. Le altre celle verranno aggiornate automaticamente.

Descrivi analogie e differenze nei grafici ottenuti.

Muovi A: c'è qualche sua posizione che mette in evidenza punti comuni alle curve? Che caratteristiche hanno questi punti? Motiva algebricamente il fatto.

Muovi lo *slider*: quello che ottieni mantiene le caratteristiche dei primi tre grafici?

Potresti allora caratterizzare questa famiglia di curve descrivendo:

- Il campo di definizione
- L'immagine
- Il segno
- La concavità
- Crescenza/decrescenza
- Le intersezioni con gli assi
- I punti in comune

- Eventuali simmetrie

Riscrivi ora in A5 il nome dello *slider* (n). Scrivi in B5 la formula x^A5. Copia in C5 la formula C4 . Nascondi i grafici di B1, B2, B3.

Muovi lo *slider*. Come descrivi la differenza tra le due curve che ottieni? Prova a disegnare la bisettrice del I e III quadrante: evidenzia qualche proprietà? Che legame c'è allora tra le curve ottenute in B4 e in B5? Perché?

Salva il file.

Scheda per lo studente Attività 6

Ci proponiamo di analizzare i grafici delle potenze x^n, con n razionale, in particolare quando n=1/r con r intero positivo dispari . Per questo utilizzerai il file *dispari_positivo*, che rinominerai subito in *frazionario_positivo_dispari*, per velocizzare la costruzione.
Questa volta inserisci nella cella B1 del Foglio di calcolo la formula x^(1/A1) e copiala in B2, B3 e B4. Le altre celle verranno aggiornate automaticamente.

Descrivi analogie e differenze nei grafici ottenuti.

Muovi A: c'è qualche sua posizione che mette in evidenza punti comuni alle curve? Che caratteristiche hanno questi punti? Motiva algebricamente il fatto.

Descrivi analogie e differenze nei grafici ottenuti.

Muovi lo *slider*: quello che ottieni mantiene le caratteristiche dei primi tre grafici?

Muovi A: c'è qualche sua posizione che mette in evidenza punti comuni alle curve? Che caratteristiche hanno questi punti? Motiva algebricamente il fatto.

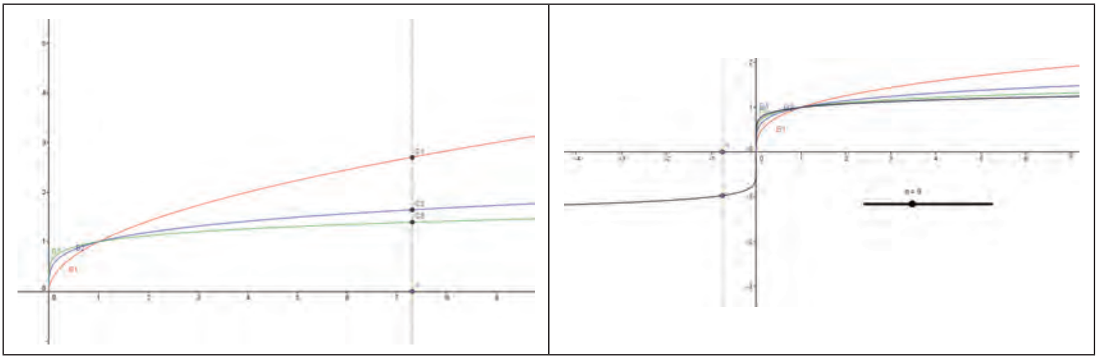
Potresti allora caratterizzare questa famiglia di curve generate dallo *slider r* descrivendo:

- Il campo di definizione
- L'immagine
- Il segno
- La concavità
- Crescenza/decrescenza
- Le intersezioni con gli assi
- I punti in comune
- Eventuali simmetrie

Riscrivi ora in A5 il nome dello *slider* (n). Scrivi in B5 la formula x^A5. Copia in C5 la formula C4 . Nascondi i grafici di B1, B2, B3.

Muovi lo *slider*. Come descrivi la differenza tra le due curve che ottieni? Prova a disegnare la bisettrice del I e III quadrante: evidenzia qualche proprietà? Che legame c'è allora tra le curve ottenute in B4 e in B5? Perché?

Salva il file.



Videate Attività 5 e 6

2. L'operatore valore assoluto[2]

Un ruolo importante riveste l'operatore valore assoluto, sia che esso venga applicato all'intera funzione sia che si applichi alla variabile indipendente della funzione. Sovente l'argomento viene affrontato da un punto di vista puramente algebrico mentre l'interpretazione geometrica dà una immediata visione del grafico e fa comprendere più a fondo il senso dell'operatore.

Un altro aspetto interessante è l'interpretazione geometrica di una equazione/disequazione del tipo $|x-a| \leq b$ o $|x-a| \geq b$. Infatti il primo membro può essere interpretato come distanza sull'asse delle ascisse. Pertanto talvolta la risoluzione può essere trovata attraverso questo tipo di rappresentazione. Da questo si può anche passare all'interpretazione grafica di una disequazione del tipo $|x-a| \leq |x-b|$.

Scheda per il docente

- **Nucleo**: relazioni e funzioni, aritmetica e algebra.
- **Obiettivi**:
  - comprendere il significato di valore assoluto;
  - sapere rappresentare funzioni in valore assoluto;
  - sapere rappresentare funzioni con il valore assoluto della variabile indipendente;
  - saper interpretare il valore assoluto di x-a come distanza.
- **Ordine di scuola**:
  - primo e secondo biennio scuola secondaria di II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: grafico di funzioni in valore assoluto.
  - Attività 2: grafico di funzioni la cui variabile indipendente è presa in valore assoluto.

[2] Schede di A. Sargenti.

- Attività 3: interpretazione di $|x\text{-}a|$ come distanza di punti sulla retta reale. Uso di tale interpretazione per la risoluzione di equazioni/disequazioni del tipo $|x\text{-}a| \leq b$.
- Attività 4: risoluzione grafica di $|x\text{-}a| \leq |x\text{-}b|$ a partire dalla interpretazione di distanza.

- **Indicazioni metodologiche**:
  - L'Attività 1 prevede di confrontare i grafici di $f(x)$, $-f(x)$ e $|f(x)|$ per scoprire, a partire dal procedimento algebrico, la trasformazione geometrica che consente di disegnare il valore assoluto partendo dal grafico di $f(x)$. Il ragionamento viene fatto da più punti di vista: si parte dal significato algebrico di valore assoluto e si disegnano le due funzioni associate. In un primo momento lo studente dovrà ragionare su quanto osserva e ipotizzare le parti di grafico che rappresentano la funzione valore assoluto.
    L'inserimento di quest'ultima direttamente può consentire di verificare se le ipotesi fatte erano corrette.
    Successivamente si ritorna alla definizione algebrica e si introduce la funzione definita a tratti che rappresenta appunto il valore assoluto, traducendo così in simboli il linguaggio naturale.
    Da ultimo viene richiamata la possibilità di superare la definizione algebrica attraverso la trasformazione geometrica, il che consente di operare su una sola funzione.
    Il docente indicherà agli studenti anche altre funzioni da analizzare, oltre a quella proposta nella scheda in relazione alla classe, per poter congetturare soluzioni generali per il problema proposto.
  - L'Attività 2 è analoga alla precedente, ma le funzioni da confrontare sono $f(x)$, $f(-x)$ e $f(|x|)$. Anche qui il problema viene affrontato a partire dal punto di vista algebrico per darne poi alla fine una interpretazione geometrica.
    Il docente indicherà agli studenti anche altre funzioni da analizzare, oltre a quella proposta nella scheda in relazione alla classe, per poter congetturare soluzioni generali per il problema proposto.
  - Attività 3: si parte dalla rappresentazione di $|x\text{-}a|= b$ come distanza di punti: tutti i punti dell'asse x che distano b da un punto dell'asse x di coordinate $(a,0)$ sono soluzioni dell'equazione. Con GeoGebra questa ricerca si realizza con una circonferenza, dati centro e raggio, che intersecherà l'asse delle ascisse in due punti, che rappresentano le soluzioni. Il discorso si estende poi alla disequazione, individuando quindi o il segmento interno alla circonferenza (quando il segno è <) o le due semirette esterne (quando il segno è >).
  - Attività 4: prevede come propedeutica l'Attività 3. In questo caso, utilizzando quanto visto nell'attività precedente, si analizza l'equazione del tipo $|x\text{-}a|=|x\text{-}b|$, che ha come soluzione $x=m$, dove m è il valore medio tra a e b. Si arriva alla soluzione disegnando due circonferenze con centri A=$(a,0)$ e B=$(b,0)$ e raggio AP e BP, dove P è un punto qualsiasi (meglio se distinto da A e B) dell'asse delle ascisse. La soluzione si trova, spostando P, quando le due circonferenze hanno raggio uguale e quindi P è il punto medio del segmento AB. Le due circonferenze risultano tangenti esternamente. Il punto P è anche estremo della semiretta che fornisce la soluzione della disequazione del tipo $|x\text{-}a|<|x\text{-}b|$. È bene far notare come non sia necessario analizzare anche la disequazione del tipo $|x\text{-}a|>|x\text{-}b|$ perché risulta del tipo di quella precedente se letta da destra a sinistra. Quello che invece influisce sul verso della soluzione è la relazione tra a e b e quindi sono da analizzare separatamente i due casi.

- **Tempi:**
  - Attività 1, 4: 1 ora ciascuna.
  - Attività 2, 3: 30 minuti ciascuna.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4.

Sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Dal grafico di f(x) al grafico di |f(x)|

Ricorda il significato di valore assoluto:

il valore assoluto $|a|$ di un numero a vale a, se $a \geq 0$; vale $-a$, se $a<0$.

Nel caso di una funzione (ad esempio $f(x)= |x -4|$) devi dunque prendere in considerazione le due funzioni, $g(x) = x - 4$ e $h(x) = -(x - 4)$, una opposta dell'altra.

Rifacendoti alla definizione data per valore assoluto, prova a congetturare quale sarà il grafico di $f(x) = |x -4|$, in relazione alle due funzioni $g(x)$ e $h(x)$.

Apri ora in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Inserisci nella Barra di inserimento $f(x) = |x -4|$. La tua congettura era corretta?

Esprimi a parole quali passaggi geometrici sono stati operati per ottenere il grafico di $f(x)$ a partire da quello delle altre due funzioni, collegando questi passaggi ai procedimenti che faresti algebricamente per definire la funzione $f(x)$ come funzione definita a tratti. Riporta questa definizione nella barra di inserimento per una nuova funzione $k(x)$ e verifica che il suo grafico coincida proprio con quello di $f(x)$.

È possibile disegnare $f(x) = |x -4|$ anche solo partendo dal grafico di $g(x)$? Con quale trasformazione geometrica? Perché?

Considera altre funzioni (che ti ha fornito il docente) e controlla se per tutte avviene quanto è avvenuta con questa.

Puoi pertanto concludere che per disegnare il grafico di una funzione in valore assoluto puoi disegnare il grafico della funzione senza valore assoluto, quindi operare una …nei tratti del grafico che sono …

Salva il file che hai ottenuto con il nome *valore_assoluto_f*.

Scheda per lo studente Attività 2

Dal grafico di f(x) al grafico di f(|x|)

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Talvolta il valore assoluto comprende solo la variabile indipendente (ad esempio $f(x) = |x| - 4$).

In questo caso quali funzioni $g(x)$ e $h(x)$ devono essere prese in considerazione? Inseriscile in GeoGebra.

Rifacendoti alla definizione data per valore assoluto, prova a congetturare quale sarà il grafico di $f(x) = |x| - 4$, in relazione alle due funzioni $g(x)$ e $h(x)$.

Inserisci ora nella Barra di inserimento $f(x) = |x| - 4$. La tua congettura era corretta?

Esprimi a parole quali passaggi sono stati operati per ottenere il grafico di $f(x)$ a partire da quello delle altre due funzioni, collegando questi passaggi ai procedimenti che faresti algebricamente per definire la funzione $f(x)$ come funzione definita a tratti. Riporta questa definizione nella Barra di inserimento per una nuova funzione $k(x)$ e verifica che il suo grafico coincida proprio con quello di $f(x)$.

È possibile disegnare $f(x) = |x| - 4$ anche solo partendo dal grafico di $g(x)$? Con quale trasformazione geometrica? Perché?

Considera altre funzioni (che ti ha fornito il docente) e controlla se per tutte avviene quanto è avvenuta con questa.

Puoi pertanto concludere che per disegnare il grafico di una funzione la cui variabile compare in valore assoluto puoi disegnare il grafico della funzione senza valore assoluto, quindi operare una …nei tratti del grafico che sono …

Salva il file che hai ottenuto con il nome *valore_assoluto_x*.

Scheda per lo studente Attività 3


Risoluzione di disequazioni del tipo $|x - a| \leq b$ o $|x - a| \geq b$, con b>0.

Ricorda: la distanza di due punti che stanno sull'asse delle x con ascissa rispettivamente p e q è data da $|p - q|$.

Tenendo conto di questa definizione, come puoi esprimere a parole l'equazione $|x-3|=4$? Le soluzioni sono date dai punti dell'asse x tali che la distanza da … è uguale a …. Prova a fare una rappresentazione con carta e matita. Quanti e quali sono questi punti?

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Se vuoi rappresentare con GeoGebra la situazione illustrata sopra, devi ricordare quale costruzione geometrica ti consente di rappresentare tutti i punti che hanno distanza costante da un punto fisso. Usa allora questo strumento di GeoGebra per la costruzione, trovando le intersezioni con l'asse delle ascisse e verificando se le soluzioni sono quelle che hai ipotizzato.

Sempre tenendo conto della definizione di distanza, come puoi esprimere a parole la disequazione $|x-3|>4$? Le soluzioni sono date dai punti dell'asse x tali che la distanza da … è maggiore di …….. Prova a fare una rappresentazione con carta e matita. Quanti e quali sono questi punti?

Riprendi ora la rappresentazione fatta precedentemente con GeoGebra e verifica se le soluzioni sono quelle che hai ipotizzato.

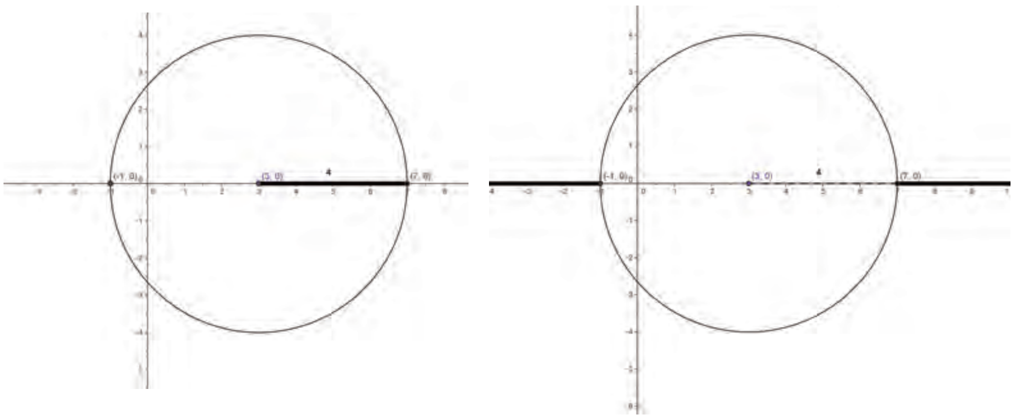
Che cosa puoi dire per $|x-3|<4$?

Ripeti il procedimento con GeoGebra per altre equazioni/disequazioni dello stesso tipo $|x - a| \leq b$ o $|x - a| \geq b$, con b>0, e controlla i risultati.

Per concludere:

- l'equazione del tipo $|x - a| = b$, con $b>0$, ha come soluzione …
- la disequazione del tipo $|x - a| \leq b$, con $b>0$, ha come soluzione …
- la disequazione del tipo $|x - a| \leq b$, con $b>0$, ha come soluzione ….

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 3

Scheda per lo studente Attività 4

Risoluzione di disequazioni del tipo $|x - a| \leq |x - b|$.

Tenendo conto di quanto visto nell'attività 3, ti proponiamo di risolvere l'equazione $|x-3|=|x+4|$.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Per rappresentare la distanza a primo membro, devi prendere una circonferenza di centro …. In questo caso però non conosci il raggio. Prendi allora un punto P sull'asse delle x e fai la costruzione usando lo strumento *circonferenza dato centro e punto*. Il punto sarà uno qualsiasi dell'asse x che chiamerai P.

Per il secondo membro devi prendere una circonferenza di centro … che passa per lo stesso punto P.

Esprimi a parole come si trova la soluzione dell'equazione: "è l'insieme di punti tali che la distanza da … e da… è …". Come devono essere allora i raggi delle due circonferenze? Dove si deve trovare il punto P? Muovi il punto P lungo l'asse delle ascisse e verifica se la tua ipotesi è corretta.

Vogliamo generalizzare il problema per risolvere equazioni del tipo $|x-a| = |x-b|$. Apri quindi un nuovo file.

Inserisci due *slider*, *a* e *b*, variabili ad esempio tra -10 e 10. Il centro della prima circonferenza sarà un punto A=(…,…), mentre il secondo centro sarà B=(…, …). Prendi un punto P (non coincidente con A e B) sull'asse delle ascisse. Disegna come fatto prima le due circoferenze. Modifica i valori degli *slider*: dove si trova la soluzione?

Vediamo ora come risolvere le disequazione $|x-a| < |x- b|$. Tieni conto che la stessa può essere letta da destra a sinistra (in questo caso la relazione è >).C'è pertanto una simmetria che ti consente di analizzare solo questo caso.

Utilizzando la costruzione fatta per l'equazione, fissa ad esempio $a= -2$ e $b=6$. Esprimi a parole che cosa significa risolvere questo tipo di disequazione: "è l'insieme dei punti per cui il raggio del cerchio di centro A è … del raggio del cerchio di centro B". Allora riporta nella parte alta della Vista Grafica due segmenti, uno sotto l'altro, di lunghezza risettivamente AP e BP. Troverai le soluzioni quando AP … BP.

Sposta il punto P e individua quando accade quanto sopra indicato. Che cosa succede alle circonferenze mentre sposti P?

Prova a risolvere algebricamente la disequazione e vedi se il risultato coincide con quanto hai trovato graficamente.

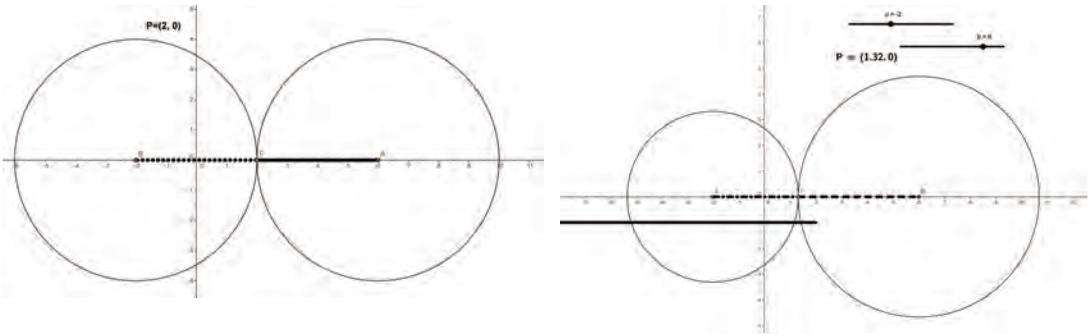
Ripeti per altri valori con $a<b$.

Cosa accade invece se $a>b$? Prova con alcuni valori di questo tipo.

Per concludere:

- l'equazione del tipo $|x-a| < |x-b|$, ha come soluzione …
- la disequazione del tipo $|x-a| < |x-b|$, con $a<b$, ha come soluzione …
- la disequazione del tipo $|x-a| < |x-b|$, con $a>b$, ha come soluzione ….

Salva il file che hai costruito.



Videate Attività 4

CAPITOLO 6

Funzioni composte

Introduzione

Nei due capitoli precedenti sono stati introdotti alcuni operatori: reciproco, potenza, radice e valore assoluto. Ciascuno è stato analizzato per le sue specifiche proprietà, geometriche ed algebriche. Però parlare di operatore applicato ad una funzione vuol anche dire analizzare il significato di funzione composta. Il software facilita la comprensione del significato di composizione di funzioni e delle proprietà legate a questa operazione, che senza una visualizzazione rischia di rimanere un "gioco" puramente formale.

Verranno analizzate alcune delle proprietà già viste in precedenza, ma in un'ottica prevalentemente funzionale, con l'obiettivo di generalizzare il discorso che prima era stato considerato dal punto di vista particolare di ogni singolo operatore.

La generalizzazione consente anche di analizzare il comportamento di altri operatori, in particolari quelli relativi a funzioni trascendenti.

I nodi concettuali che verranno qui affrontati riguardano:

- funzione composta;
- funzione quadrato e sue proprietà qualitative;
- funzione valore assoluto di una funzione e sue proprietà qualitative;
- funzione esponenziale e sue caratteristiche qualitative;
- funzione logaritmica e sue caratteristiche qualitative.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico.
- Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.
- Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$, $f(x) = a/x$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Lo studente apprenderà ad analizzare le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Utilizzerà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.). Studierà funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa). (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*).

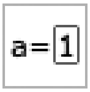
Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado

- Lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).

- Lo studente saprà descrivere le proprietà qualitative di una funzione e costruirne il grafico.
- Lo studente saprà risolvere equazioni relative alla funzione modulo, con metodi grafici o numerici e anche con l'aiuto di strumenti elettronici. (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*).

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	
Campo di inserimento	

OSSERVAZIONE: può essere utile mettere dei campi di inserimento nella Vista Grafica in modo da poter modificare velocemente le funzioni ed avere così in tempi rapidi la possibilità di analizzare più casi. Si ricorda che comunque è necessario prima definire una funzione, poi introdurre il campo di inserimento associato: a questo punto è possibile la modifica dell'equazione.

1. Costruire una funzione composta[1]

La composizione di funzioni è un'operazione dal significato che non è assolutamente intuitivo. Risulta pertanto importante determinare un collegamento concreto tra le funzioni componenti e la funzione composta. Per questo, almeno nel caso più semplice di funzione di funzione, si vuole dare un'interpretazione grafica della composizione.

Un aspetto da analizzare è anche la non commutatività della composizione, che può essere scoperta direttamente dai grafici.

Scheda per il docente

- **Nucleo**: relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - comprendere il significato di funzione composta;
  - sapere individuare il dominio di una funzione composta, a partire da quello delle funzioni componenti;
  - comprendere la non commutatività della composizione di funzioni.
- **Ordine di scuola**:
  - primo e secondo biennio scuola secondaria di II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Dopo un'attività di ripasso sul concetto di funzione composta (Attività 1) attraverso

[1] Schede di A. Sargenti.

un esempio si propone di costruire, utilizzando GeoGebra, il grafico della funzione analizzata nella prima attività (Attività 2).

- **Indicazioni metodologiche**:
  - Risulta importante un richiamo preliminare al concetto di funzione composta, alla definizione del suo dominio e al calcolo della funzione per alcuni valori della variabile indipendente. Si è scelto un esempio con un valore da sostituire in cui il calcolo non è immediato, proprio per evitare le solite sostituzioni 0, 1, ecc. Per questo verrà utilizzata la calcolatrice con una particolare attenzione ai passaggi che vengono fatti da un punto di vista algoritmico per essere poi in grado di associarli alle costruzioni geometriche corrispondenti.
  - Si è scelta una semplice funzione irrazionale perché adatta sia al primo sia al secondo biennio della scuola secondaria superiore. Il docente può naturalmente optare per un'altra funzione in relazione al livello scolare ed alle esigenza di programmazione didattica.
  - Si è scelto di indicare solo la costruzione di $h(x) = g(f(x))$ lasciando che sia lo studente a ripetere il procedimento analogo per $k(x)= f(g(x))$. Questo consentirà anche di verificare se lo studente ha effettivamente compreso la trasposizione grafica dell'algoritmo.
  - Nelle schede per gli studenti non è stato suggerito di mettere un campo di inserimento per le funzioni, ma il docente può valutare, in base alle abilità degli studenti, se farlo inserire o meno.
- **Tempi**:
  - Attività 1: 30 minuti.
  - Attività 2: 1 ora.


Schede per lo studente Attività 1, 2.

Per l'attività 2 è riportata la videata relativa.

Scheda per lo studente Attività 1


Considera la funzione $y = \sqrt{x^2 - 4}$. Indica la sequenza dei procedimenti che segui con una calcolatrice per ottenere il valore di y quando x=2.75.

Inserendo un qualsiasi valore di x trovi sempre un corrispondente valore per y? Perché? Prova ad esempio con x=1.75.

Considera ora la funzione $h(x)$ $y = \sqrt{x^2 - 4}$; osserva che $h(x)$ può considerarsi come composizione delle due funzioni $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Indica il dominio di ciascuna funzione e quindi il dominio della funzione composta $h(x) = g(f(x))$, scrittura che indica che prima è necessario calcolare il valore di $f(x)$ e poi al valore trovato applicare la funzione $g(x)$.

Quale funzione $k(x)$ si ottiene se operiamo lo scambio tra $f(x)$ e $g(x)$, ovvero qual è l'equazione di $f(g(x))$? $h(x)$ e $k(x)$ sono la stessa funzione?

La composizione di funzioni gode allora della proprietà commutativa?

Indica ora il dominio della funzione composta $k(x)$. È lo stesso della funzione $h(x)$? Perché?

Nel caso delle funzioni $h(x)$ *e* $k(x)$ parliamo di **funzioni composte** perché generate dall'applicazione successiva delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Scheda per lo studente Attività 2

Si vuole analizzare una funzione composta, ad esempio la funzione dell'Attività 1 $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; ripeti per questa i passaggi individuati per il calcolo della funzione nella precedente scheda, riportandoli adesso con GeoGebra dal punto di vista algebrico-grafico, ossia analitico.

Apri in un nuovo file la Vista Algebra e la Vista Grafica con gli assi cartesiani. Inserisci le due funzioni componenti $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Inserisci un punto A sull'asse x che rispetto alla procedura di calcolo della scheda 1 rappresenta … (NOTA: muovere il punto per assicurarsi che si muova proprio sull'asse delle ascisse).

Definisci un punto P che abbia la stessa ascissa di A, che stia sul grafico della funzione $f(x)$ e che lo descriva al variare di A sull'asse x. Rispetto alla procedura di calcolo della scheda 1 il punto P rappresenta …

Disegna il segmento AP. Traccia la bisettrice del I quadrante. Definisci quindi il punto S che sta sulla bisettrice ed ha la stessa ordinata di P. Disegna il segmento PS. Definisci il punto Q che ha l'ascissa di S e sta sul grafico della funzione $g(x)$. Disegna il segmento SQ. Quale ruolo gioca la bisettrice rispetto ai passaggi di calcolo che hai fatto nella scheda dell'Attività 1?

Definisci un punto M con ascissa di P e con ordinata di Q: hai così ottenuto la **composizione** delle due funzioni. Infatti cosa rappresentano l'ascissa e l'ordinata del punto M?

Migliora il grafico con colori e stili differenti per le funzioni, i segmenti e i punti.

Attiva la traccia per M.

Muovendo A, si determina sempre il punto M? Motiva la risposta.

La traccia del punto M genera il grafico di una funzione? Perché?

Puoi ora:

- costruire il luogo di M al variare di A;
- oppure disegnare il grafico della funzione composta inserendo l'equazione $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

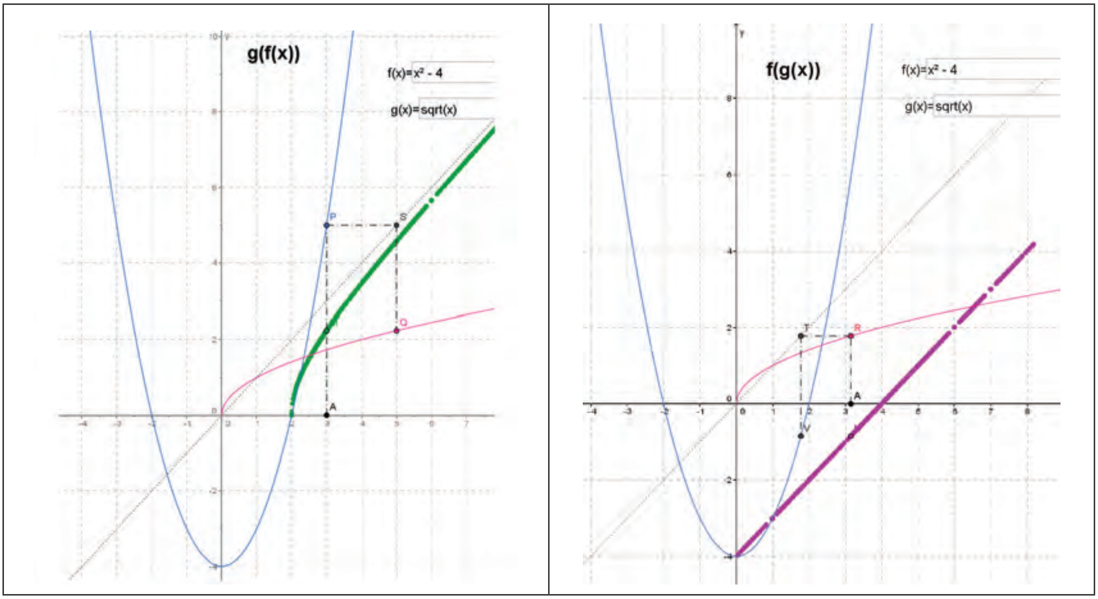
Nella Vista Grafica 2 attiva $f(x)$, $g(x)$ e A.

Ripeti in modo opportuno la costruzione in modo che rappresenti i punti di $k(x)= f(g(x))$.

Il grafico di $k(x)$ coincide con quello di $h(x)$? La composizione di funzioni gode della proprietà commutativa? Perché?

Salva il file che hai ottenuto con il nome *composizione*.

Con questo file potrai analizzare altre funzioni composte, anche non algebriche.



Videate Attività 2

2. Quadrato e valore assoluto[2]

Quadrato e valore assoluto sono due operatori che si incontrano molto sovente e rivestono caratteristiche speciali ed importanti, anche per le interconnessioni con gli aspetti algebrici.

Il primo ha in comune con il secondo il fatto che l'immagine non è mai negativa. Viene dunque spontaneo paragonare qual è l'azione di questi operatori su una funzione $f(x)$, mettendo in evidenza analogie e differenze.

Scheda per il docente

- **Nucleo**: relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - sapere tracciare un grafico qualitativo della funzione quadrato di una funzione data;
  - sapere individuare analogie e differenze tra il grafico del quadrato e quello del valore assoluto di una funzione.
- **Ordine di scuola**:
  - secondo biennio scuola secondaria di II grado.

[2] Schede di A. Sargenti.

- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: costruzione della funzione $[f(x)]^2$ ed individuazione delle sue caratteristiche.
  - Attività 2: comparazione dei grafici delle funzioni $[f(x)]^2$ e $|f(x)|$, con individuazione di analogie e differenze.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - La scelta della funzione di cui studiare il quadrato dipende dal livello scolare. Si può anche semplicemente iniziare con un'equazione del tipo $mx+q=0$, ma possono essere certamente significative anche funzioni più complesse, algebriche o trascendenti. L'obiettivo è quello di stabilire che la funzione quadrato non è mai negativa, che ha gli stessi zeri della funzione data, ma con molteplicità raddoppiata e che in tali punti il grafico è tangente all'asse x.
  - Se la classe conosce poi un po' di Analisi può essere interessante fare considerazioni sulla monotonia a partire dalla derivata prima $2\,f(x)\,f'(x)$ e dal suo segno, concorde con $f(x)$ quando la funzione è crescente, discorde se è decrescente.
  - Può essere significativo il confronto tra i grafici di $[f(x)]^2$ e $|f(x)|$. Entrambi sono non negativi, hanno una certa "somiglianza" tranne che nei punti corrispondenti agli zeri della funzione $f(x)$. Può essere un'occasione per far osservare la differente caratteristica legata alla tangenza, che introduce al problema della derivabilità.
- **Tempi**:
  - Attività 1 e 2: 45 minuti ciascuna.

Schede per lo studente Attività 1, 2.

Per le attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri il file *composizione.*

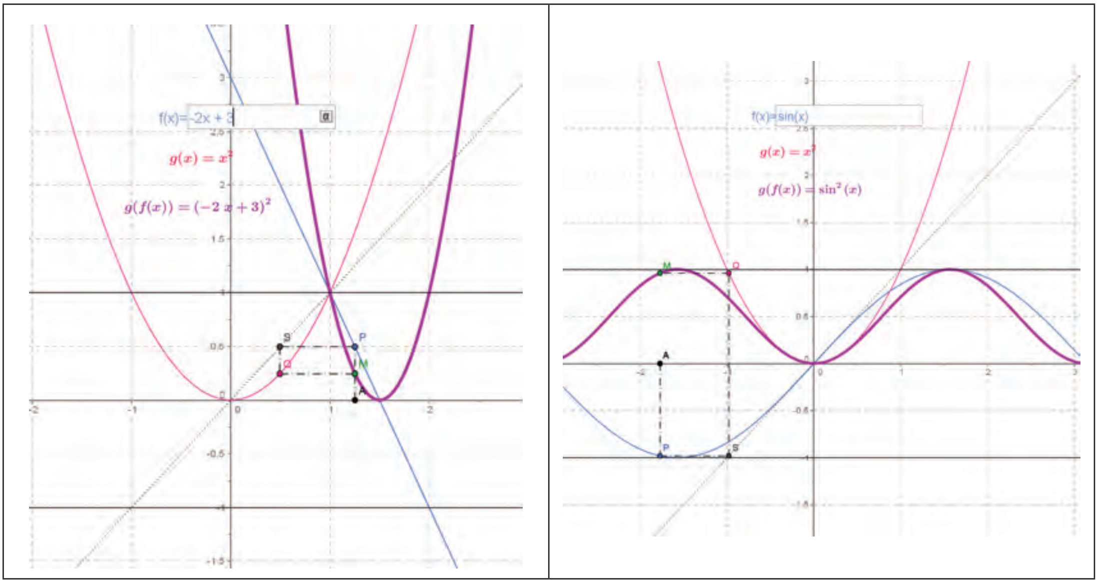
Inserisci per $f(x)$ la funzione che ti indica il docente e quindi $g(x)=x^2$. Quale forma algebrica assume la funzione $h(x)$? Qual è il suo dominio? Che segno ha la funzione? Perché? Quali sono i suoi zeri? Che relazione esiste tra questi e gli zeri di $f(x)$?

Disegna le due rette, $y=1$ e $y=-1$. Determina i punti di intersezione sia con $f(x)$ che con $h(x)$: che cosa osservi? Motiva la risposta algebricamente.

Se la funzione $f(x)$ ha proprietà particolari (asintoti, simmetrie, periodicità) analizza come queste si trasformano con la composizione.

Inserisci altre equazioni per la $f(x)$. Dopo aver analizzato un certo numero di funzioni, sai individuare le caratteristiche che consentono di passare dal grafico di $f(x)$ a quello di $h(x)$?

Salva il file che hai ottenuto.



Videate Attività 1

Scheda per lo studente Attività 2

Apri in un nuovo file la Vista Grafica con gli assi e la Vista Algebra.

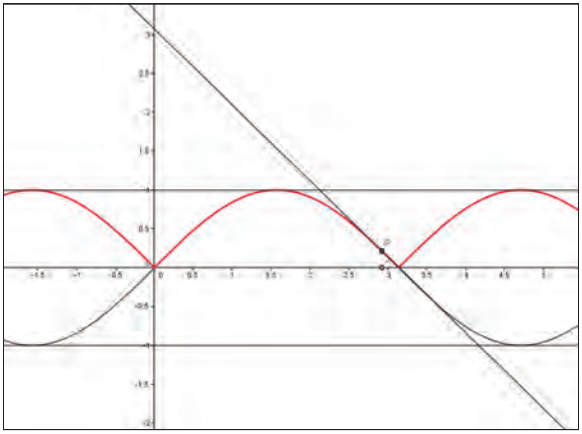
Inserisci una funzione $f(x)$ che ti indicherà il docente. Quindi definisci $g(x)=|f(x)|$.

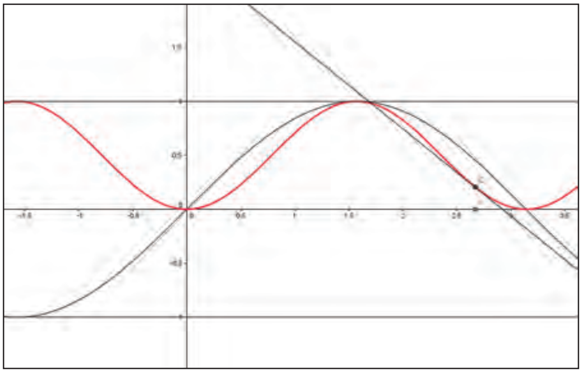
Apri la Vista Grafica 2. Condividi in essa la funzione $f(x)$. Inserisci quindi $h(x)= (f(x))^2$. Confronta i due grafici ed evidenzia le caratteristiche comuni e le differenze.

Come nell'attività precedente, disegna le rette *y=1 e y=-1* e condividile con le due Viste: osserva le intersezioni e spiega algebricamente quanto osservi.

Per analizzare meglio la situazione, prendi un punto A vincolato all'asse x e condividilo con le due Viste Grafiche. Prendi ora un punto P nella Vista Grafica principale con l'ascissa di A e che appartenga al grafico di $g(x)$. Quindi prendi un punto Q nella Vista Grafica 2, sempre con l'ascissa di A, ma appartenente al grafico di $h(x)$. Per i due punti individuati, P e Q, traccia le tangenti alle rispettive curve. Se muovi A, come si comportano le due tangenti? Se $g(x)$ cresce/decresce, che cosa accade a $h(x)$? In particolare che cosa accade nei punti che sono zeri della funzione $f(x)$?

Salva il file che hai ottenuto.





Videate Attività 2

3. Funzione esponenziale e logaritmo[3]

Funzioni composte del tipo $h(x)=e^{f(x)}$ e $h(x)=\log(f(x))$ in genere vengono considerate particolarmente complesse e si pensa che richiedano la conoscenza di almeno elementari nozioni di Analisi per studiarle. Al contrario una osservazione con strumenti di geometria dinamica può mettere in evidenza regolarità nei grafici, caratteristiche comuni, che possono consentire di tracciare poi un grafico qualitativo abbastanza significativo a partire dalla funzione $f(x)$.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** relazioni e funzioni.
- **Obiettivi:**
  - sapere tracciare un grafico qualitativo della funzione esponenziale di una funzione data;

[3] Schede di A. Sargenti.

  - sapere tracciare un grafico qualitativo della funzione logaritmo di una funzione data;
  - conoscere le caratteristiche di funzioni composte, esponenziali o logaritmiche.
- **Ordine di scuola**:
  - secondo biennio scuola secondaria di II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: costruzione della funzione $e^{f(x)}$ ed individuazione delle sue caratteristiche.
  - Attività 2: costruzione della funzione $\log f(x)$ ed individuazione delle sue caratteristiche.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - Si parte dalle caratteristiche della funzione esponenziale (sempre definita, positiva, passante per il punto (0,1), ecc.) per definire le caratteristiche della funzione composta.
  - Nel caso gli studenti abbiano già nozioni di Analisi, si potrà far notare che la derivata $e^{f(x)}f'(x)$ assume il segno di $f'(x)$, essendo $e^{f(x)}$ sempre positiva.
  - A differenza di altre attività, in questo caso non ci si sofferma sul problema asintoti, perché la casistica risulta alquanto articolata e porta a quattro situazioni differenti. Nel caso però il docente lo ritenga opportuno, potrà essere affrontato anche questo argomento.
  - Si parte dalle caratteristiche della funzione logaritmica (in base e), che non è sempre definita; inoltre passa per il punto (1,0) ed è negativa per $x<1$ e positiva per $x>1$. Possiede inoltre un asintoto verticale.

    Anche in questo caso elementi di base di analisi forniscono ulteriori informazioni. Infatti la derivata $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ assume il segno di $f'(x)$, essendo $f(x)>0$ il campo di definizione di $\log f(x)$.
- **Tempi**:
  - Attività 1 e 2: 45 minuti ciascuna.


Schede per lo studente Attività 1, 2.

Per le Attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri il file *composizione*.

Inserisci per $f(x)$ la funzione che ti indica il docente e quindi $g(x)=e^x$.

Scrivi l'equazione della funzione $h(x)$. Qual è il dominio della funzione? Che segno ha la funzione? Perché?

Determina gli zeri della funzione $f(x)$.

Traccia la retta $y=1$: quali sono le ascisse dei punti di intersezione fra la retta e il grafico di $h(x)$? C'è qualche corrispondenza tra questi punti e punti particolari di $f(x)$?

In corrispondenza di quali intervalli $h(x)$ è minore di 1? In quali maggiore di 1? Perché?

Se la funzione $f(x)$ ha delle proprietà, in particolare simmetrie e periodicità, analizza come queste si trasformano con la composizione.

Inserisci altre equazioni per la $f(x)$. Sai individuare le caratteristiche che consentono di passare dal grafico di $f(x)$ a quello di $h(x)$?

Salva il file che hai ottenuto.

Scheda per lo studente Attività 2

Apri il file *composizione*.

Inserisci per $f(x)$ la funzione che ti indica il docente e quindi $g(x)=\log x$.

Scrivi l'equazione della funzione $h(x)$. Qual è il dominio della funzione?

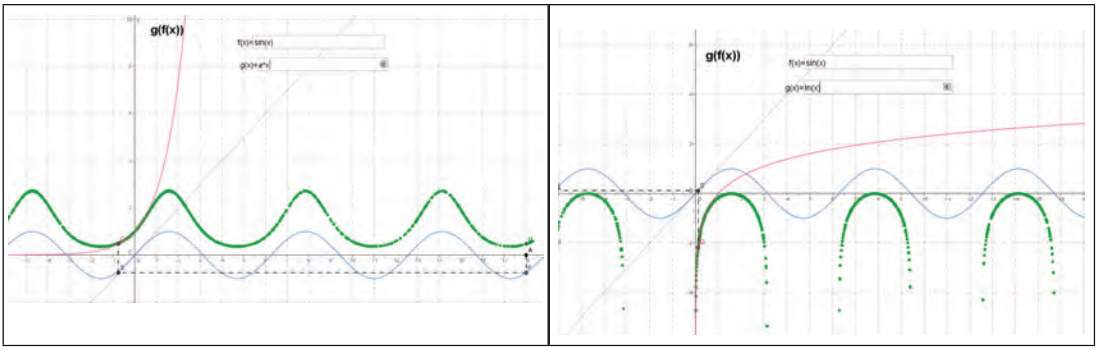
Determina gli zeri della funzione $h(x)$. Traccia la retta $y=1$: quali sono le ascisse dei punti di intersezione fra la retta e il grafico di $f(x)$? Perché esiste una relazione tra gli zeri di $h(x)$ e queste ascisse?

In corrispondenza di quali intervalli $h(x)$ è minore di 0? In quali maggiore di 0? Che relazione esiste tra il segno di $h(x)$ e i valori di $f(x)$? Che cosa accade a $h(x)$ in corrispondenza degli zeri di $f(x)$?

Se la funzione $f(x)$ ha delle proprietà, in particolare asintoti, simmetrie e periodicità, analizza come queste si trasformano con la composizione.

Inserisci altre equazioni per la $f(x)$. Sai individuare le caratteristiche che consentono di passare dal grafico di $f(x)$ a quello di $h(x)$?

Salva il file che hai ottenuto.



Videate Attività 1 e 2

CAPITOLO 7

Congetturare, argomentare, dimostrare

Introduzione

L'attività del dimostrare caratterizza una matematica matura e fa parte del curricolo nella scuola; si tratta di un processo lungo e laborioso che richiede un continuo lavoro articolato su fasi successive. Si inizia dalle osservazioni, le scoperte e le produzioni di congetture, a cui seguono le validazioni delle stesse, con la ricerca di controesempi o di argomentazioni coerenti per giungere, infine, alle formalizzazioni e alle comunicazioni delle dimostrazioni.

In questo capitolo si vogliono fornire alcuni esempi di problemi aperti in cui gli studenti possano esplorare diverse situazioni matematiche. L'intento è favorire la produzione di congetture e abituare all'argomentazione per motivare la validazione delle congetture stesse, cercando di sfruttare a pieno il valore aggiunto di GeoGebra.

Il *Trascinamento*[1] e la funzione *Cattura dati*, ad esempio, aiutano gli studenti a esplorare, a formulare congetture e validarle con argomentazioni pertinenti. Il tutto accompagnato dall'uso di molteplici rappresentazioni degli oggetti matematici, in particolare nel passaggio da un registro a un altro.

Come in tutti i problemi aperti, gli studenti devono essere liberi di procedere autonomamente attivando i percorsi risolutivi che ritengono più opportuni e il docente dovrebbe essere disposto ad accettare procedimenti non previsti, ma corretti.

Le attività presentate sono solo alcuni esempi per mostrare come sia possibile accompagnare gli studenti nella delicata evoluzione che li porta dall'argomentare al dimostrare.

L'acquisizione di un linguaggio matematico rigoroso è un obiettivo da raggiungere nell'arco dell'intero percorso scolastico: con l'aiuto dell'insegnante gli studenti dovrebbero produrre le loro argomentazioni, a volte imprecise ma ricche di significato, confrontarle e discuterle in classe per giungere così a riconoscere, nell'uso di simboli e scritture formali, forme sintetiche di espressione che vanno oltre il linguaggio naturale. Diventa così indispensabile prevedere un percorso in verticale di attività che sviluppino l'argomentazione, partendo dalla prima classe della scuola primaria (con domande come "Spiega perché…"), senza confinare le attività argomentative in uno spazio ristretto rispetto al tempo ma anche rispetto ai temi: l'argomentare dovrebbe inserirsi in molti contesti e nei diversi nuclei matematici, non sono nel nucleo di geometria.

I principali nodi concettuali che verranno qui affrontati riguardano:

- modelli matematici per rappresentare situazioni reali;
- infinito e infinitesimo.

Saranno sviluppati in attività che mirano a competenze relative a:

- risolvere problemi:

[1] Tra le caratteristiche di GeoGebra vi è il fatto che per eseguire una costruzione è necessario esplicitare una sequenza corretta di comandi. Terminata la costruzione, alcuni elementi del disegno, non tutti, possono essere trascinati. Il trascinamento consente di controllare se la costruzione è stata fatta in modo corretto e nello stesso tempo apre la strada all'esplorazione e alla congettura, agevolata dal fatto che con il trascinamento è percepibile sensorialmente il contrasto tra cosa varia e cosa no.

    - individuare informazioni utili,
    - confrontare strategie risolutive,
    - scegliere una strategia risolutiva opportuna,
    - esporre il procedimento;
- avanzare congetture;
- verificare congetture proprie o altrui;
- giustificare, definire, generalizzare;
- dimostrare.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Linee generali e competenze

- Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base.
- Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale. (*Indicazioni nazionali per i Licei*).
- Il docente di Matematica concorre a far conseguire, al termine del percorso quinquennale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale: padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica; possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate; collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche. (*Linee guida Istituti Tecnici e Professionali*).

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu:

Strumenti	*Icone*
Crea nuovo strumento …	

Strumenti	*Icone*
Inserisci immagine	

OSSERVAZIONE sugli strumenti personalizzati.

GeoGebra consente la creazione di *strumenti personalizzati* dall'utente, basati su una costruzione esistente. È importante ricordare che dopo la creazione, lo strumento personalizzato potrà essere utilizzato sia con il mouse, sia con un comando nella barra di inserimento.

Per creare uno strumento personalizzato si utilizza l'opzione *Crea nuovo strumento* del menu *Strumenti*, si apre una finestra di dialogo che guida l'utente alla creazione dello strumento stesso. Lo strumento va quindi salvato, anche con lo stesso nome del file che si sta utilizzando: infatti la sua estensione è .ggt (anziché .ggb come per i file soliti). Potrà quindi essere richiamato ogni volta che serve all'interno di un qualsiasi file del tipo .ggb.

OSSERVAZIONE sull'inserimento di immagini.

La posizione di un'immagine inserita nello schermo può essere assoluta o relativa al sistema di coordinate: è possibile specificare l'impostazione desiderata nella scheda *Fondamentali* della finestra di dialogo *Proprietà*. Inoltre nella scheda *Posizione* della finestra di dialogo *Proprietà* è possibile specificare fino a tre "corner" dell'immagine: ciò consente la flessibilità necessaria per scalare, ruotare e perfino distorcere le immagini.

			
La posizione dei tre corner e i loro nomi.	È stato indicato solo uno dei tre corner: la figura mantiene le dimensioni e si posiziona sullo schermo nel punto stabilito dal corner.	Sono stati indicati due corner su cui l'immagine viene posizionata. La figura ottenuta è simile a quella originale (sono mantenute le proporzioni).	Sono stati fissati tutti e tre i corner che, essendo posizionati casualmente, causano la distorsione dell'immagine.

1. Fiocco di neve – la curva di Von Koch[2]

Iterare all'infinito una costruzione porta spesso a scoprire situazioni apparentemente paradossali e sicuramente poco intuitive. In questi casi la fase di scoperta e di congettura spesso non basta, ma richiede di essere seguita da una fase di dimostrazione. Sono proprio le situazioni contro-intuitive che possono aiutare gli studenti a comprendere il senso del dimostrare e farne nascere la necessità: là dove tutto procede secondo l'intuito che bisogno c'è di faticare per dimostrare?

Uno degli esempi più noti di curve costruite con procedimenti iterativi fu indicato dal matematico svedese H. Von Koch (1870-1924) con la sua curva: il fiocco di neve.

[2] Schede di S. Beltramino.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** spazio e figure.
- **Obiettivi**:
  - Osservare alcune proprietà della curva di Von Koch.
  - Utilizzare i concetti di limite, di successione e di serie.
  - Fornire un esempio contro-intuitivo per far nascere negli studenti l'esigenza della dimostrazione.
- **Ordine di scuola**:
  - secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività:**

  l'attività è suddivisa in più fasi.
  - Nell'Attività 1 gli studenti disegnano con carta e matita i primi passi della curva di Von Koch. Agli studenti si chiede di produrre congetture sul comportamento del perimetro e dell'area al variare del numero di passi.
  - Nell'Attività 2 la costruzione della curva viene eseguita con l'ausilio del software. Le congetture ora vengono prodotte anche con l'aiuto del foglio di calcolo e del cattura dati.
- **Indicazioni metodologiche:**

  Nell'Attività 1 gli studenti lavorano singolarmente, su un foglio di carta: gli allievi devono disegnare il fiocco di Von Koch e avanzare ipotesi sulla lunghezza del lato dei triangoli, sulla misura dell'area e su quella del perimetro. La fase dell'Attività 1 deve durare al massimo mezz'ora.

  Lo scopo è far congetturare ogni singolo studente, senza l'ausilio del calcolatore; le ipotesi devono poi essere condivise nel gruppo di lavoro nella seconda fase (Attività 2) e validate o meno anche con l'aiuto di GeoGebra.

  Nell'Attività 2 gli studenti lavorano in piccoli gruppi omogenei, sono guidati ad avanzare ipotesi, utilizzando contemporaneamente il registro grafico e quello numerico. Si chiede loro di cercare esempi e contro-esempi, ma soprattutto di generalizzare.

  La scheda è densa e, a discrezione del docente, può essere suddivisa in tre momenti: lato, area e perimetro.

  Per compilare la tabella nel Foglio di calcolo il docente può suggerire agli studenti di reperire i primi valori direttamente dal disegno della Vista Grafica e, in particolare, dalla Vista Algebra ma è importante che gli allievi arrivino a scrivere una formula per calcolare la misura richiesta, così da proseguire anche senza avere il disegno completo.

  Per quanto riguarda il calcolo della lunghezza del lato, nella scheda si sottolinea il contrasto tra la formula e i calcoli approssimati di GeoGebra: la lunghezza del lato all'n-esimo passo sarà $\frac{3}{n}$; una frazione di questo tipo non avrà valore zero, ma in GeoGebra già al quinto o sesto passo compare il numero zero. Il docente può far notare che il numero di valori non nulli varia in funzione del tipo di approssimazione fissata in *Opzioni*. È un utile spunto per affrontare con la classe un discorso sulle approssimazioni.

Se il docente lo ritiene opportuno, può fornire agli allievi il file con già disegnato il fiocco di neve e farli lavorare solamente sul Foglio di calcolo.

La successione della lunghezza dei lati[3] è esprimibile con la progressione geometrica di ragione $\frac{l}{3}$. Poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=0$ si ricava che la lunghezza del lato tende a 0 al tendere all'infinito il numero n dei triangoli costruiti.

Per calcolare l'area è possibile ricordare che l'area di un triangolo equilatero è $\frac{1}{2}l^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, dove l rappresenta la lunghezza del lato del triangolo equilatero.

L'area del fiocco di neve, costruito al crescere del numero n dei passi, è pari all'area del triangolo iniziale, $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, a cui si aggiungono le aree dei triangoli piccolini costruiti ad ogni passo. Le aree di questi triangolini rappresentano una progressione geometrica di ragione $\frac{4}{9}$ e primo termine $\frac{\sqrt{3}}{12}l^2$:

- area del triangolo equilatero di partenza: $S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$,
- al triangolo di partenza si aggiungono 3 triangoli equilateri di lato $\frac{l}{3}$:

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{l^2}{9}=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2$$

- nel passo successivo si aggiungono 12 triangoli equilateri di lato $\frac{l}{9}$:

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2+12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{l^2}{81}=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2\left(\frac{4}{9}\right)$$

- al terzo passo si aggiungono ancora 48 triangoli equilateri di lato $\frac{l}{27}$:

$$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

- al passo n-esimo: $S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)+\ldots+\frac{\sqrt{3}}{12}l^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

Quindi l'area del fiocco sarà pari a:

$$S_0+\lim_{n\to+\infty}\left(S_1+S_2+\ldots+S_n\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+\frac{\frac{\sqrt{3}}{12}l^2}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2+\frac{3\sqrt{3}}{20}l^2=\frac{8\sqrt{3}}{20}l^2=\frac{2\sqrt{3}}{5}l^2$$

Anche per il perimetro si può tener presente che la prima figura è costituita da tre lati di lunghezza l, quindi il perimetro sarà: $p_0 = 3l$.

Nella seconda figura ogni lato della prima è sostituito da 4 segmenti di lunghezza $\frac{1}{3}l$, quindi: $p_1=3\left(4\cdot\frac{1}{3}l\right)=3\left(\frac{4}{3}l\right)$.

[3] Una trattazione teorica sulla curva di Von Koch è reperibile all'indirizzo http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Apr_04/APPUNTI.HTM

Proseguendo, nella terza figura i 12 lati della seconda figura sono sostituiti con 4 lati di lunghezza $\frac{1}{9}l$, quindi: $p_2 = 12\left(4 \cdot \frac{1}{9}l\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 l$, e così via.

Il perimetro della figura è esprimibile con una progressione geometrica: $3l$, $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot l$, $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot l$, …, $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$, che tende a infinito al tendere di n all'infinito.

Al termine della seconda attività o, se il docente lo ritiene opportuno, inframmezzato nella seconda attività (dopo l'analisi della lunghezza del lato del triangolo, l'area e il perimetro) è fondamentale che l'insegnante confronti le soluzioni degli studenti e istituzionalizzi il sapere costruito con una lezione dialogata.

Per quanto riguarda il calcolo dell'area potrebbe essere interessante valutare il rapporto tra l'area "finale" del fiocco di neve e l'area del triangolo iniziale:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{5}l^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}l^2} = \frac{8}{5}$$, osservando che un'area compresa da un contorno che si estende all'infinito è inferiore al doppio del triangolo equilatero iniziale.

- **Tempi:**
  - 5 ore.


Schede per lo studente Attività 1, 2.

Per le Attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Prendi un foglio di carta e disegna un triangolo equilatero di lato 3.

Dividi ciascun lato in tre parti uguali e costruisci sulla parte centrale di ogni lato un altro triangolo equilatero, esterno al triangolo iniziale.

Cancellando la base dei nuovi triangoli, si ottiene una figura che ricorda l'ingrandimento di un fiocco di neve.

Ripeti la costruzione a partire dai lati del fiocco.

Secondo te per quante volte si può ripetere la costruzione? Perché?

Cosa succede alla lunghezza del lato dei triangoli equilateri che via via si costruiscono? Perché?

Cosa succede all'area del fiocco che via via si costruisce? Perché?

E al suo perimetro? Perché?

Scheda per lo studente Attività 2

Ora lavora con il tuo gruppo e prova a ripetere la costruzione precedente con GeoGebra.

Suggerimento: potrebbe aiutarti la creazione di *strumenti personalizzati*, puoi pensare a uno strumento che divide in tre parti uguali un lato e uno che costruisce un triangolo equilatero dati due suoi vertici oppure un unico strumento che fa entrambe le azioni.

Visualizza il Foglio di calcolo. Nella colonna A inserisci il numero di passi fatti, arriva almeno fino a 10. Quindi per ogni riga riporta i dati relativi a ciascun passo di costruzione.

Nella colonna B inserisci la lunghezza del lato dei triangoli equilateri che di volta in volta disegni.

Cosa osservi? È in accordo con le tue previsoni? Esiste una formula per generalizzare la lunghezza del lato dei triangoli che via via costruisci? Può succedere che tale lunghezza valga zero? Osserva i numeri comparsi sul foglio di calcolo e confrontali con la formula trovata, sono in accordo? Perché?

Ora calcola l'area del fiocco ad ogni passo, scrivi i valori dell'area in una colonna del Foglio di calcolo.

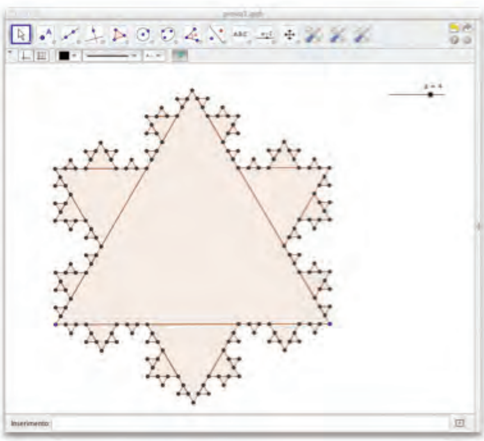
Suggerimento: per aiutarti puoi utilizzare più colonne, ad esempio potresti scrivere:

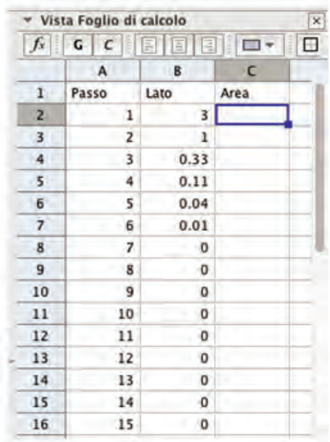
- nella colonna C l'area del nuovo triangolo costruito con gli *strumenti personalizzati;*
- nella colonna D il numero di nuovi triangolini aggiunti;
- nella colonna E l'area complessiva di tutti i nuovi triangoli aggiunti;
- nella colonna F l'area complessiva della figura che via via si va costruendo.

Cosa osservi? L'area complessiva aumenta? È in accordo con le tue previsoni? Esiste una formula per generalizzare l'area della figura? Se ti serve, aumenta il numero di passaggi.

Nella colonna successiva scrivi il perimetro della figura che via via si va costruendo. Cosa osservi? Il perimetro aumenta? È in accordo con le tue previsoni? Esiste una formula per generalizzare il perimetro della figura?

Salva il tuo lavoro e chiudi GeoGebra.




Vista Foglio di calcolo

	A	B	C
1	Passo	Lato	Area
2	1	3	
3	2	1	
4	3	0.33	
5	4	0.11	
6	5	0.04	
7	6	0.01	
8	7	0	
9	8	0	
10	9	0	
11	10	0	
12	11	0	
13	12	0	
14	13	0	
15	14	0	
16	15	0	

Videata Attività 2

2. Angoli alla circonferenza[4].

Ci sono proprietà delle figure piane che risultano talmente evidenti dal punto di vista figurale da non far sorgere negli studenti l'esigenza di una dimostrazione: si pensi alle proprietà dei triangoli isosceli. Al contrario, alcuni teoremi permettono di fare affermazioni generali su aspetti poco intuitivi, non immediatamente percepibili dai disegni. In questo caso la dimostrazione sancisce il raggiungimento di nuova conoscenza e diventa quindi passaggio importante e necessario. Ne è un esempio l'invarianza nell'ampiezza degli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco. Naturalmente la proprietà va 'fatta scoprire' dagli studenti attraverso un problema aperto e non formalizzata subito nell'enunciato di un teorema. La scelta della proposta di lavoro riguarda un contesto reale: come scattare una foto che abbia determinate caratteristiche? La soluzione del problema non è ovvia e questo può essere un incentivo per invogliare a intraprendere la strada della ricerca. Gli allievi vanno stimolati a esplorare e simulare per giungere a formulare una congettura che dovrà poi essere verificata e quindi dimostrata. Nella fase di ricerca ed esplorazione è opportuno non sottovalutare gli strumenti 'poveri', come fogli di carta, cordini, cannucce….. Attraverso il software GeoGebra si potranno raccogliere e organizzare le congetture formulate con le manipolazioni precedentemente effettuate e preparare il terreno alla dimostrazione.

- **Nucleo:** spazio e figure.
- **Obiettivi:**
  - Proprietà degli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco.
- **Ordine di scuola:**
  - scuola secondaria di II grado, primo biennio.
- **Descrizione attività:**

  L'attività prevede una fase iniziale di congettura ed esplorazione da compiere prima con carta e matita e solo successivamente l'ausilio del software (Attività 2). Con GeoGebra si riprende il lavoro fatto con carta e matita, si validano le congetture avanzate ed eventualmente si giunge ad una dimostrazione delle stesse.
- **Indicazioni metodologiche**:

  Il lavoro è pensato a piccoli gruppi omogenei, con al massimo 3 studenti.

  Nelle prime fasi, di esplorazione e congettura, l'insegnante non deve inibire le iniziative dei ragazzi, affinché abbiano la possibilità di operare loro stessi in prima persona, mettendosi in gioco. Solo in una fase successiva sarà compito del docente guidare gli studenti a constatare l'esigenza di affrontare una dimostrazione.

  Le domande e le risposte sono poste per iscritto, in modo da permettere agli studenti di lavorare rispettando i propri tempi di apprendimento; gli interventi del docente dovrebbero essere successivi al lavoro di gruppo e mirati a far nascere negli alunni l'esigenza di dimostrare le congetture formulate su base empirica.

[4] Schede di P. Accomazzo.

Al termine della seconda e terza Attività il docente deve prevedere un momento in cui, con una lezione dialogata, sistematizza le risposte degli studenti e formalizza il sapere costruito.

Osservazione: riportiamo qui il punto b del problema 1 del tema di matematica dell'esame di stato PNI del 2001, "Si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC[5] sotto un angolo di 45°".

- **Tempi:**
    - 5 ore, compresa la discussione.


Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Per le Attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente. Attività 1

Gli alunni di una scuola hanno dipinto un murales lungo 8 m sul muro di cinta del cortile. Luca è incaricato di fotografare l'intero murales, senza riprendere le porzioni di muro che sono a lato.

Ovviamente deve tener conto sia della posizione da cui scatta la foto sia del campo visivo della macchina fotografica. Dove può posizionarsi Luca se l'obiettivo della sua macchina fotografica offre un campo visivo di 62°?

Analizza il problema con un modello piano: traccia su un foglio di carta un rettangolo, che rappresenti il cortile, e al centro di uno dei suoi lati disegna un segmento AB, che rappresenti la traccia del murales. Ritaglia ora da un altro foglio un angolo di 62°.

Disponi l'angolo di carta in modo che i suoi lati passino per A e per B e fissa sul foglio di carta il punto corrispondente al vertice dell'angolo. Muovi l'angolo sempre facendo passare i suoi lati per A e per B e individua, se esistono, altre posizioni possibili per il vertice.

Scrivi le tue supposizioni:

- quanti punti hai individuato?
- Ne esistono altri?
- Come si dispongono i punti trovati?

Motiva le tue risposte.

Scheda per lo studente Attività 2

Con il telefonino scatta una foto al foglio su cui hai segnato i punti e importa la fotografia in GeoGebra. Costruisci sull'immagine gli oggetti geometrici di GeoGebra: i punti A e B, il segmento AB e i punti che rappresentano le possibili posizioni di Luca.

[5] AC è un segmento noto di lunghezza assegnata.

Traccia ora l'asse del segmento AB. Prendi un punto C sull'asse e costruisci la circonferenza che ha centro in C e che passa per A.

Muovi C fino a ricoprire la maggior parte dei punti-posizione del disegno. Il modello costruito 'a mano' conterrà sicuramente qualche imprecisione: un piccolo trucco per compensare le piccole imprecisioni potrebbe essere quello di ispessire leggermente la circonferenza.

Considera un punto D sulla circonferenza, traccia l'angolo $A\hat{D}B$: quant'è la sua misura? Ricorda che il modello costruito a mano potrebbe non essere preciso; per evitare decimali inutili puoi selezionare l'opzione di arrotondamento della misura con 0 cifre decimali. Muovi D sulla circonferenza e valuta la misura dell'angolo $A\hat{D}B$ al variare di D.

Scrivi le tue osservazioni.

Salva il lavoro fatto e chiudi GeoGebra.

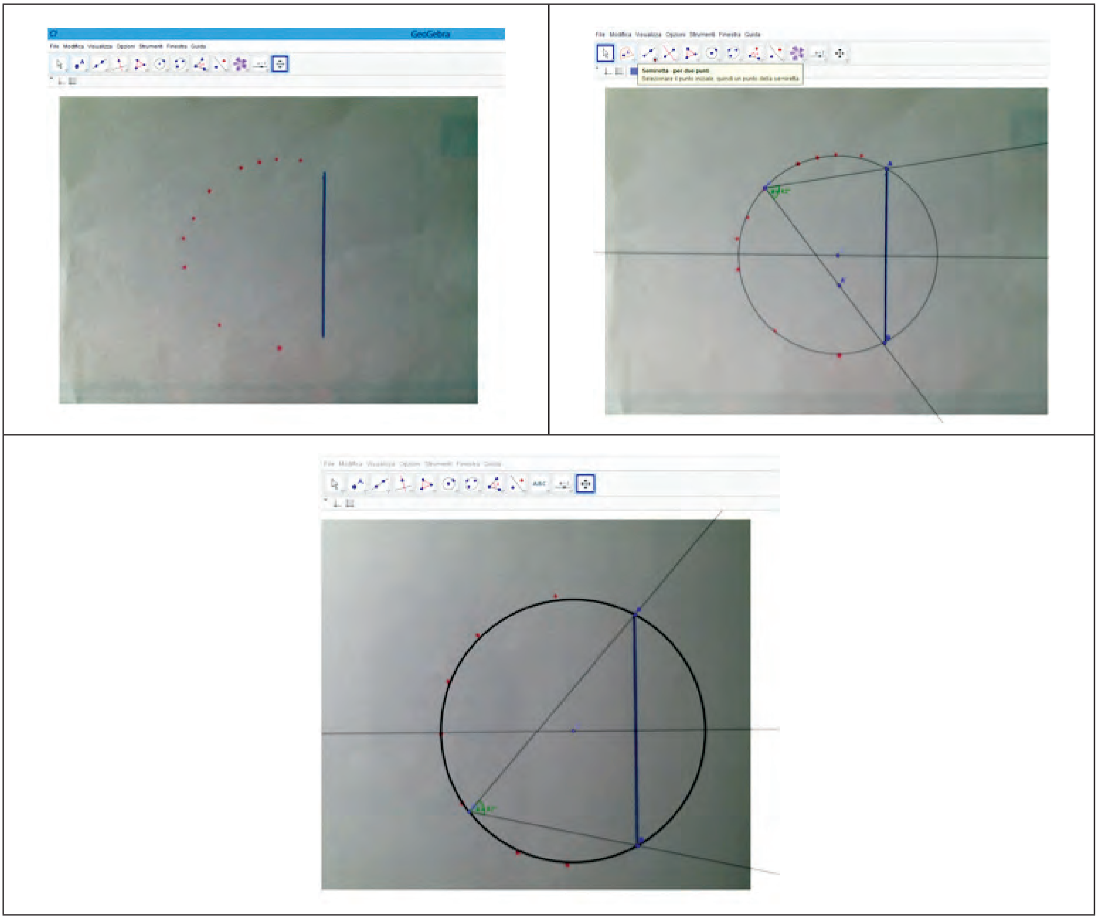
Scheda per lo studente Attività 3

Dopo aver scoperto che i punti individuati appartengono a una circonferenza, apri GeoGebra e riproduci la situazione precedente senza importare la fotografia: disegna il segmento AB che rappresenta il murales, la circonferenza di centro C, con C appartenente all'asse di AB e tale che detto D un punto sulla circonferenza, l'angolo $A\hat{D}B$ sia di 62°.

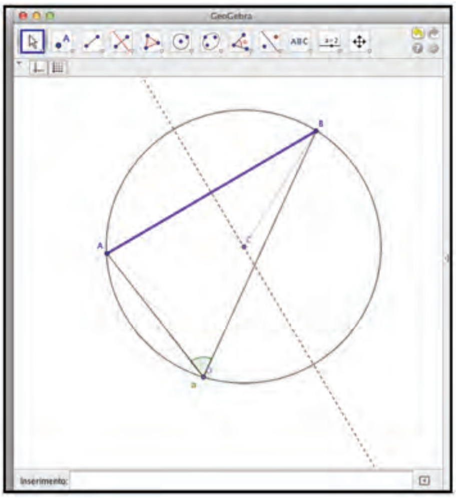
Osserva l'immagine costruita e rispondi alle seguenti domande:

- tutti i punti sulla circonferenza soddisfano la condizione di partenza? L'angolo sarà sempre di 62°? Perché?
- Riesci a costruire sempre la circonferenza? Dov'è posizionato il centro? Quanto misura il raggio? Perché?
- Il fatto che l'angolo sia di 62° ha influenzato in qualche modo la soluzione trovata? Se Simone possedesse un grandangolo il cui angolo di campo è 140° quale sarebbe la soluzione? E se l'angolo fosse α?

Videate Attività 1



Videate Attività 2



Videata Attività 3

3. Teorema di Varignon[6]

Gli allievi sono coinvolti in una situazione problematica in cui devono individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura e costruire modelli. L'attività propone una congettura e la conseguente dimostrazione del teorema di Varignon: la tesi di questo teorema è generalmente inaspettata e la sua ricerca si presta alla formulazione di osservazioni e congetture, per passare da una figura apparentemente senza particolari proprietà ad una specifica figura.

Come nella prima attività presentata, il fatto che la scoperta possa portare stupore nei ragazzi in quanto non intuitiva aiuta a mostrare la necessità di una dimostrazione.

- **Nucleo:** spazio e figure.
- **Obiettivi:**
  - Comprendere e formulare il teorema di Varignon.
- **Ordine di scuola:**
  - scuola secondaria di II grado, primo o secondo biennio.
- **Descrizione attività:**

  L'Attività prevede fasi successive che guidano lo studente a congetturare l'ipotesi di Varignon. Si chiede agli studenti di lavorare su un triangolo e con il supporto di GeoGebra (Attività 1) per poi passare ad un quadrilatero; prima si lavora senza l'aiuto del software (Attività 2) e dopo con GeoGebra (Attività 3).

  Tra l'Attività 3 e l'Attività 4 è prevista una lezione dialogata, guidata dal docente, in cui si giunge a enunciare e dimostrare il teorema di Varignon partendo dalle risposte dei ragazzi.

  L'Attività 4 prevede un'ulteriore analisi del quadrilatero interno per la ricerca di particolarità.
- **Indicazioni metodologiche**:

  Il lavoro è pensato per piccoli gruppi omogenei, composti da due o tre studenti. Le schede prevedono domande e risposte scritte, in modo da permettere agli studenti di lavorare rispettando i propri tempi di apprendimento.

  Gli interventi del docente dovrebbero essere successivi all'Attività 3 e mirati a far nascere negli alunni l'esigenza di dimostrare.

  Dopo aver formalizzato il teorema, segue un'ulteriore fase di esplorazione in cui si invitano gli studenti ad analizzare la figura alla ricerca di particolarità. Le schede in questo caso non contengono dettagli tecnici sull'utilizzo del software, presupponendo che gli studenti siano già in grado di utilizzarlo e volendo lasciarli liberi nella fase esplorativa.

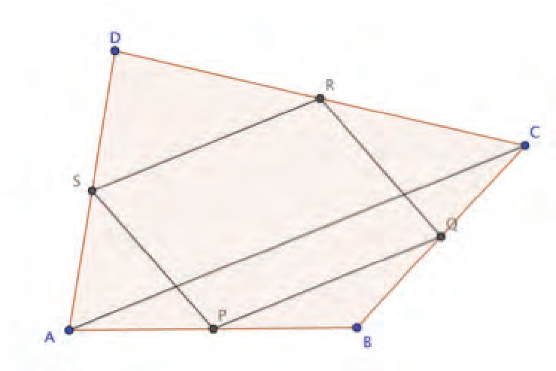
  Pierre Varignon (1654-1722) fu un insegnante francese nei Collèges Mazarin e Royal di Parigi. Fu membro di importanti accademie quali l'Académie Royale des Sciences, l'Accademia di Berlino e la Royal Society di Londra. Il teorema che porta il suo nome fu pubblicato postumo, nel 1731, in *Elemens de Mathematique*.

  Il teorema afferma che *se ABCD è un quadrilatero convesso e P, Q, R e S sono i punti medi dei lati, allora il quadrilatero PQRS è un parallelogramma*.

[6] Schede e attività di S. Beltramino, P. Curletti, C. Idrofano e L. Poli, liberamente tratte dall'attività di m@t.abel "Ombre e proporzionalità".

Per la dimostrazione si deve considerare che il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è pari alla metà della sua lunghezza.

Tracciata quindi la diagonale AC, questa divide il quadrilatero in due triangoli, ABC e ACD, aventi in comune il lato AC.



Per la proprietà ricordata i segmenti PQ e RS sono entrambi paralleli a AC e, quindi, paralleli tra loro. Inoltre la lunghezza di PQ e RS è pari alla metà della lunghezza di AC.

Ne consegue che PQRS è un parallelogramma.

La dimostrazione è valida anche per quadrilateri non convessi.

- **Tempi:**
  - 5 o 6 ore, comprese le lezioni dialogate.


Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Per le attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Apri GeoGebra e visualizza la Vista Grafica senza assi cartesiani.

Disegna un triangolo ABC e indica con M e N i punti medi di due lati del triangolo.

Unisci i punti M e N con un segmento. Quali proprietà ha il segmento ottenuto? Perché?

Segna ora il punto medio Q del terzo lato del triangolo e costruisci il triangolo MNQ. Quali proprietà osservi?

Prova a modificare il triangolo, le caratteristiche osservate si conservano?

Motiva le tue risposte.

Scheda per lo studente Attività 2

Disegna su un foglio di carta un quadrilatero ABCD e costruisci i punti medi dei suoi lati.

Rappresenta il poligono che ha per vertici i punti medi individuati. Che tipo di quadrilatero ottieni? Quali sono le sue proprietà?

Scrivi le tue ipotesi.

Scheda per lo studente Attività 3

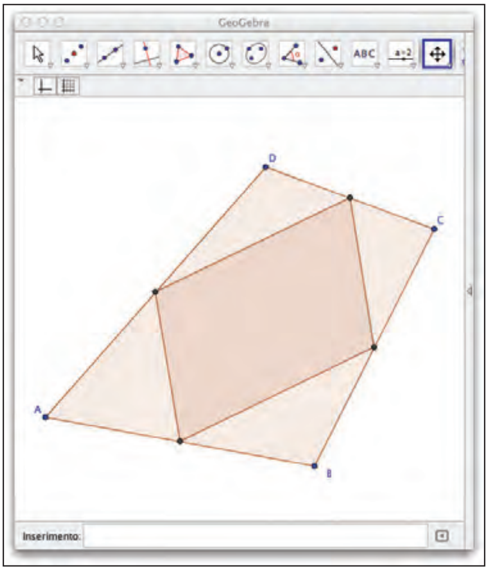
Apri GeoGebra e visualizza la Vista Grafica senza assi cartesiani.

Considera un quadrilatero ABCD e il quadrilatero ottenuto unendo i punti medi dei lati del poligono ABCD.

Che tipo di quadrilatero si ottiene? Quali sono le sue proprietà? Le congetture formulate in precedenza sono verificate o è necessario cambiare qualcosa?

Modifica ora il quadrilatero di partenza. Cosa si osserva?

Motiva le tue risposte.



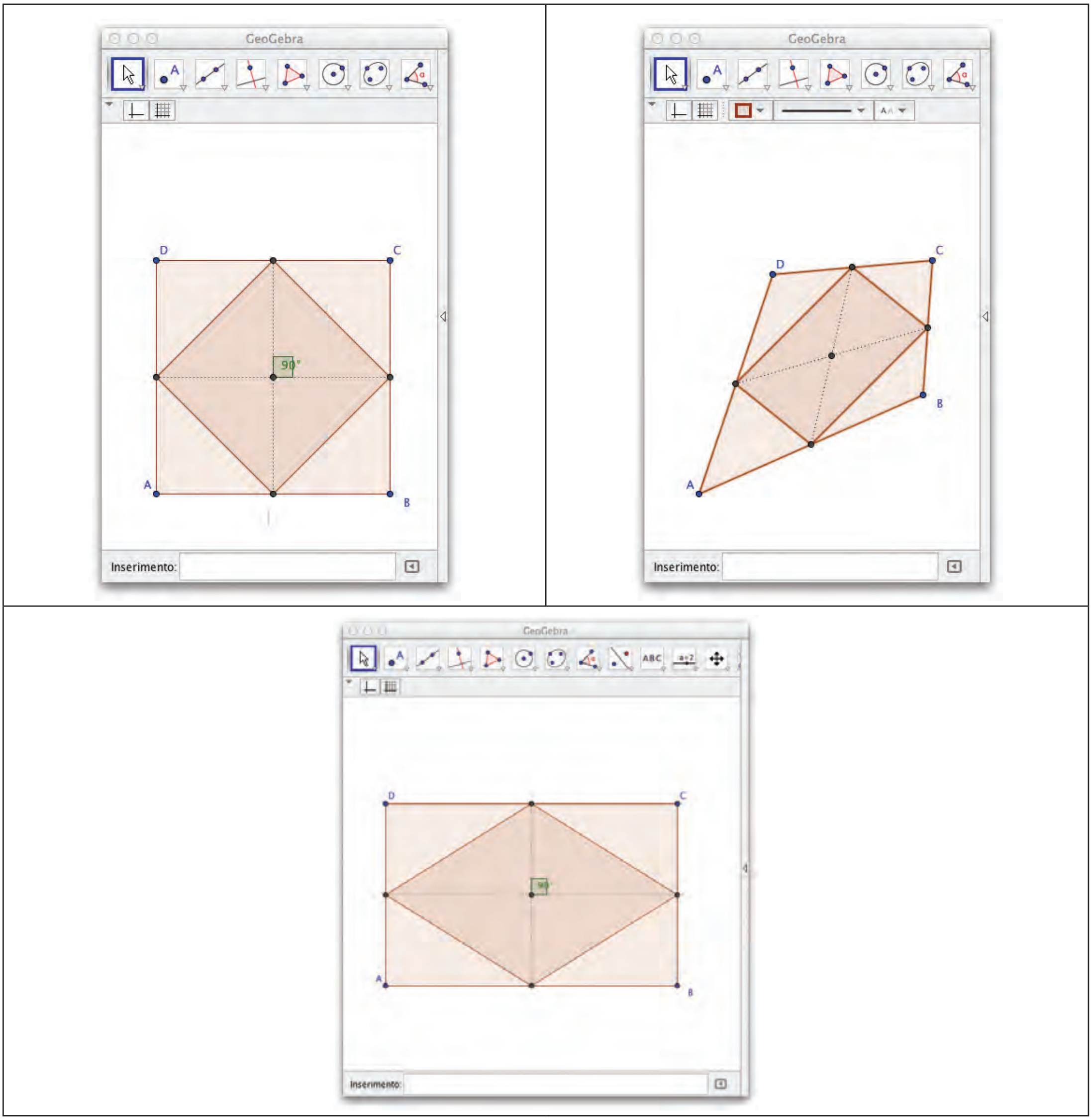
Videata Attività 3

Scheda per lo studente Attività 4

Dimostrato il teorema di Varignon, si vuole mettere in relazione il perimetro del parallelogramma interno con la misura delle diagonali del quadrilatero di partenza. Secondo te sono in relazione? Come?

Quali ipotesi devi aggiungere al quadrilatero di partenza affinché il parallelogramma sia un rettangolo? E perché diventi un rombo? E infine quali ipotesi si devono aggiungere affinché il parallelogramma sia un quadrato?

Scrivi le risposte motivando le tue scelte, ma prima di rispondere costruisci ed esplora le figure con GeoGebra.



Videate Attività 4

4. Rettangoli isoperimetrici[7]

Problemi che prevedono l'analisi di figure isoperimetriche sono ben noti nella didattica e possono essere dei buoni pretesti per proporre problemi di ottimizzazione, i quali possono essere risolti con diversi approcci supportati dall'utilizzo di GeoGebra: alla soluzione del problema si può arrivare per via geometrica, grafica, numerica o algebrica. Il docente può sfruttare i diversi approcci per approfondire il legame tra i diversi registri matematici ed il passaggio da uno all'altro.

Nell'attività che segue le indicazioni di lavoro sono minime, proprio per cercare di non guidare o inibire in alcun modo il processo di congettura e scoperta degli allievi.

- **Nucleo:** relazioni e funzioni.
- **Obiettivi:**
  - Risolvere un problema di ottimizzazione seguendo diversi approcci.
- **Ordine di scuola:**
  - scuola secondaria di II grado, primo o secondo biennio.
- **Descrizione attività:**

  la proposta di lavoro prevede tre fasi successive. Nell'Attività 1 gli studenti sono invitati a cercare un rettangolo di area massima, assegnato il perimetro. Nell'Attività 2 l'attenzione si sposta sulla ricerca di un triangolo isoscele di area massima, sempre con il perimetro assegnato, lo stesso dell'attività precedente. Infine (Attività 3) si richiede agli studenti di individuare una figura con area massima avente il perimetro fissato.
- **Indicazioni metodologiche:**

  questa volta le schede fornite agli studenti sono volutamente poco guidate e poco dettagliate sia dal punto di vista della ricerca della soluzione sia dal punto di vista tecnico dell'uso del software: si vuole lasciare agli studenti la completa libertà di soluzione, che potrebbe prevedere persino una ricerca senza l'ausilio di GeoGebra.

  Le attività sono pensate a gruppi omogenei di 3 o 4 studenti e sono da svolgere in aula informatizzata, lasciando agli allievi la possibilità di manipolare liberamente il software; per questo i ragazzi dovrebbero avere un minimo di conoscenza di GeoGebra, in particolare dovrebbero conoscere i diversi ambienti lavoro (la Vista Algebra, il Foglio di calcolo e la Vista Grafica) e sapere come far interagire i vari ambienti tra loro.

  L'insegnante, dove lo ritiene opportuno, può intervenire suggerendo un particolare approccio risolutivo, magari invitando gli allievi a esplorare con il trascinamento le figure oppure a utilizzare il *Cattura dati*, ma nei problemi aperti spesso si trovano soluzioni e approcci insoliti che è bene valorizzare.

[7] Schede e attività di S. Beltramino, liberamente tratte dall'attività di m@t.abel "Ognuno cresce a modo suo" e dal problema "Il pollaio" proposto nel Progetto di Edumatics. I due progetti si possono reperire in rete: www.risorsedocentipon.indire.it e http://www.edumatics.mathematik.uni-wuerzburg.de/it

Nell'Attività 1, a differenza della maggior parte delle schede in questo volume, non si specifica quale ambiente di lavoro aprire tra quelli messi a disposizione da GeoGebra: si chiede di disegnare uno *slider* nella Vista Grafica, ma la scelta di non far chiudere la Vista Algebra o di non dire esplicitamente di aprire il Foglio di calcolo è dettata dal fatto che gli studenti stessi possono liberamente scegliere di lavorare in uno o più ambienti.

Al termine della prima attività il docente deve prevedere una lezione dialogata per condividere le soluzioni e arrivare a formalizzare la risposta così da scoprire che il recinto di area massima ha la forma di un quadrato. In questa fase, come già detto, è importante sottolineare il passaggio da un registro all'altro.

Nelle Attività 2 e 3 si prova a indagare con figure diverse dai rettangoli. È probabile che gli allievi riescano a risolvere la seconda attività senza troppe difficoltà, ripetendo i passaggi della prima, mentre può succedere che gli studenti non riescano a pensare, nella quarta attività, alla circonferenza.

Il file GeoGebra riportato ad esempio per l'Attività 3 contiene uno *slider n* che varia da 3 a 70 con incremento 1 e che indica il numero dei lati del poligono regolare. Si crea poi un segmento lungo $60/n$ con l'opzione *segmento di lunghezza fissa* e un poligono regolare indicando gli estremi del segmento e con un numero di lati pari ad a.

- **Tempi:**
  - 8 ore.


Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Per le attività sono riportate le videate relative.

Scheda per lo studente Attività 1

Giorgio deve costruire un nuovo recinto per il suo pollaio, di forma rettangolare. Vorrebbe avere un pollaio più grande di quello del vicino, anch'esso rettangolo, Entrambi i recinti hanno il perimetro lungo 60 m. Come puoi aiutare Giorgio?

Apri GeoGebra con la Vista Grafica. Rappresenta uno *slider a* il cui valore indica la misura di un lato del recinto di Giorgio. Fai in modo che lo *slider* abbia un incremento di 0,1; qual è il minimo valore che può assumere a? E il valore massimo? Perché? Imponi un intervallo di variazione opportuno per a.

Ora rappresenta un rettangolo di perimetro 60 con un lato che misura a. Quanto dovrà misurare la seconda dimensione? Perché?

Muovi lo *slider a* e considera l'area del rettangolo: cosa osservi?

Scrivi le tue risposte motivando le tue scelte.

Suggerimento: per rispondere può essere utile non lavorare solamente nella Vista Grafica.

Scheda per lo studente Attività 2

Giorgio però non è convinto del proprio pollaio: forse potrebbe assumere la forma di un triangolo isoscele. Se la lunghezza del recinto è sempre di 60 m, come deve essere il triangolo per avere la massima area?

Scrivi la risposta motivando le scelte.

Confronta la soluzione trovata con l'area del quadrato. È maggiore?

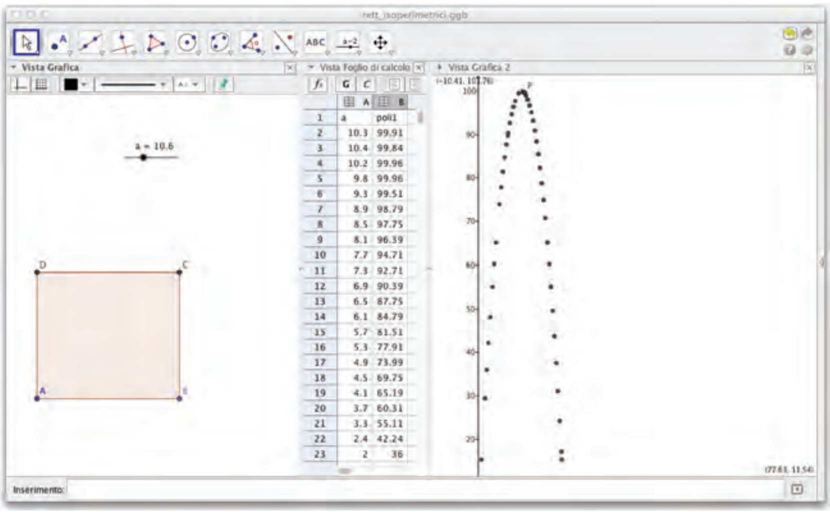
Scheda per lo studente Attività 3

Eppure Giorgio non si dà pace. Vuole avere un pollaio ancora più grande.

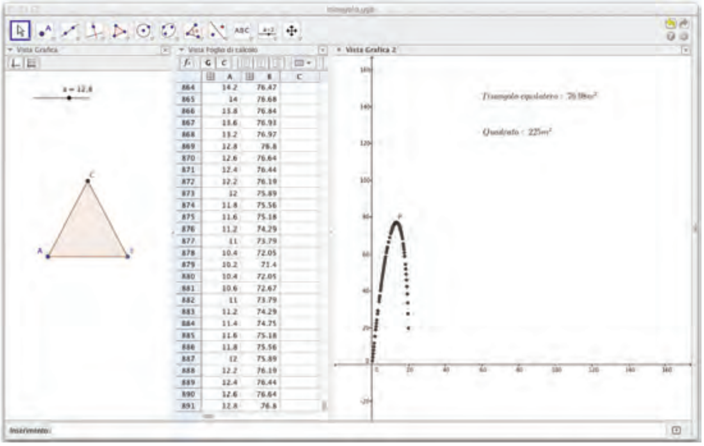
Utilizzando la rete di 60 m e omettendo la condizione che il recinto debba essere di forma rettangolare, esistono delle recinzioni che si possono costruire con un'area maggiore?

Fai delle congetture, usa GeoGebra per validarle ed eventualmente avanzare altre congetture.

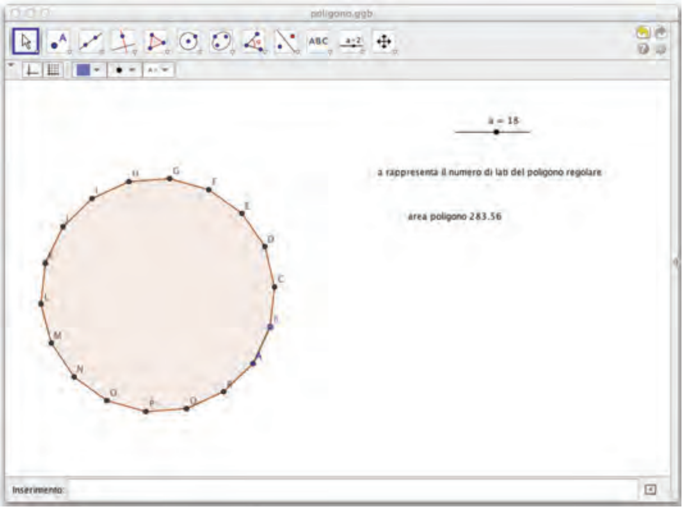
Scrivi la risposta motivando le tue scelte.



Videata Attività 1



Videata Attività 2



Videata Attività 3

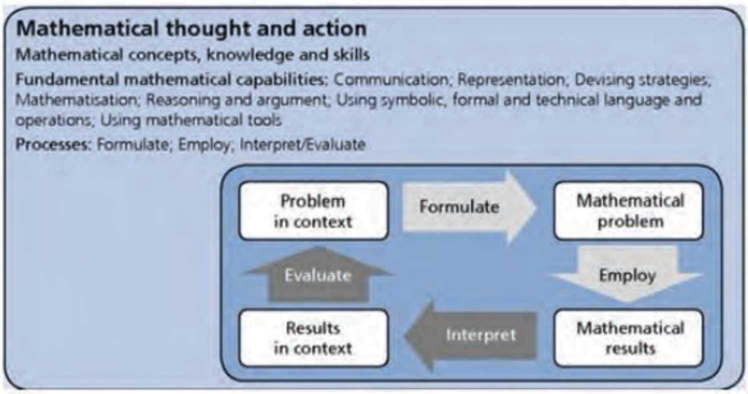
CAPITOLO 8

Problemi e modelli

Introduzione

L'attività del *formulare e risolvere problemi* costituisce un aspetto cruciale del 'fare matematica'. I problemi possono essere di vario genere e attingere da contesti reali, di fantasia o matematici: l'essenziale è che pongano davvero una questione da affrontare e risolvere e non siano '*solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola*'[1]. Il riferimento ai problemi compare nelle Indicazioni ai curricoli di tutti i cicli scolastici e di tutti gli ordini di scuola, a sottolineare sia l'importanza dell'acquisizione di concetti in situazioni aperte, sia l'aspetto strumentale della matematica per modellizzare e interpretare. Un'analoga attenzione è posta dalle Indicazioni nazionali anche ai *modelli matematici*, con richiami specifici e ricorrenti. Del resto il tema della modellizzazione ha da sempre un ruolo centrale nelle indagini OCSE PISA, come si evince anche dalla definizione di *mathematical literacy*, ovvero di competenza matematica, rilasciata nel framework 2012[2], in cui si sottolinea la necessità di sviluppare le capacità degli studenti a utilizzare la matematica in contesti di vita reale attraverso esperienze didattiche significative. Le prove PISA sono costruite per misurare il 'saper fare' dei quindicenni sia su determinati contenuti matematici che sui processi tipici della modellizzazione: *formulare*, *utilizzare*, *interpretare*.

Lo schema seguente descrive come tali processi entrino in azione nel ciclo della modellizzazione: a partire da un problema del mondo reale viene *formulato* un modello matematico; si studia tale modello con gli strumenti propri della matematica (*utilizzare*) e, attraverso l'interpretazione dei risultati del modello e la loro validazione (*interpretare*) si ritorna al contesto reale del problema di partenza.



Da 'PISA 2012 Assessment and Analytical Framework'

[1] Indicazioni nazionali per il Primo Ciclo – MIUR, settembre 2012, pag. 49.

[2] *La literacy matematica è la capacità di un individuo di* formulare, utilizzare e interpretare *la matematica in una varietà di contesti. Include ragionare matematicamente e usare i concetti, le procedure, i fatti e gli strumenti matematici per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Essa aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo e a produrre giudizi ben fondati e decisioni necessarie a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi.*

I nodi concettuali che verranno affrontati in questo capitolo riguardano:

- modelli di situazioni problematiche;
- funzioni lineari;
- equazioni lineari e metodi di risoluzione numerici, grafici e simbolici;
- funzioni irrazionali;
- equazioni irrazionali e metodi di risoluzione numerici e grafici;
- notazioni e registri di rappresentazione di relazioni fra grandezze.

Riferimenti a Indicazioni nazionali e Linee guida

Primo biennio scuola secondaria di secondo grado.

- Saranno obiettivo di studio:
  - il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
  - costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo. (*Indicazioni generali e competenze di Matematica per i Licei*).
- Nella scelta dei problemi è opportuno fare riferimento sia ad aspetti interni alla matematica sia ad aspetti collegati a svariati ambiti scientifici (economico, sociale, tecnologico) e più in generale al mondo reale (*Linee guida per gli Istituti Tecnici - premessa a Matematica*).
- Lo studente apprenderà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni (*Indicazioni nazionali per i Licei – Obiettivi specifici di apprendimento*).
- Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie. (*Linee guida per gli Istituti Tecnici - Abilità*).
- Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline in situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica. (*Linee guida per gli Istituti Tecnici - Abilità*).

Secondo biennio scuola secondaria di secondo grado.

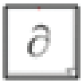
- La disciplina, nell'ambito della programmazione del Consiglio di classe, concorre in particolare al raggiungimento dei seguenti risultati di apprendimento espressi in termini di competenza:
  - utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per affrontare situazioni problematiche, elaborando opportune soluzioni (*Istituti Tecnici e Professionali*);
  - utilizzare i concetti e i modelli delle scienze sperimentali per investigare fenomeni sociali e naturali e per interpretare dati (*Istituti Professionali*). (*Linee guida per gli Istituti Tecnici e professionali*)

- Lo studente sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo. (*Indicazioni nazionali per i Licei - Obiettivi specifici di apprendimento*).
- Costruire modelli matematici per rappresentare fenomeni delle scienze economiche e sociali, anche utilizzando derivate e integrali.

  Costruire modelli, continui e discreti, di crescita lineare, esponenziale o ad andamento periodico a partire dai dati statistici. (*Linee guida per gli Istituti Tecnici*).

Uno sguardo a GeoGebra

Strumenti GeoGebra richiamabili dal menu della Vista CAS:

Strumenti	*Icone*	*Strumenti*	*Icone*
Derivata		Risolvi numericamente	

OSSERVAZIONE:

La Vista CAS offre l'accesso al Computer Algebra System di GeoGebra dedicato al calcolo simbolico; può essere aperta selezionando *Vista CAS* dal Menu *Visualizza*. La Vista è suddivisa in righe, ciascuna delle quali ha un campo di inserimento in alto ed un campo di visualizzazione in basso. Una funzione in Vista CAS va definita con il simbolo di assegnazione (:=); il simbolo di uguaglianza (=) è invece riservato alle equazioni.

Nulla vieta tuttavia di importare nella Vista CAS e di manipolare espressioni algebriche definite in Vista Algebra o in Vista Grafica. Viceversa, le funzioni definite nella Vista CAS vengono automaticamente riprodotte nella Vista Algebra e disegnate nella Vista Grafica.

1. La suddivisione del campo[3]

Il passaggio dalla situazione problematica reale al modello matematico è particolarmente delicato per la scelta dell'ambito e degli strumenti matematici più adatti alla descrizione e all'analisi dei dati e delle loro relazioni. Le risposte al problema si giocano proprio su questa scelta iniziale che gli allievi devono imparare a fare acquisendo via via una certa abilità 'predittiva' nel prefigurarsi le possibili risposte che potranno ottenere da un particolare ambito matematico e da una modalità di rappresentazione. E' un'abilità che non si improvvisa e che va perseguita dall'insegnante con opportune proposte didattiche e con una particolare attenzione alla scelta dei problemi ed alla formulazione dei compiti che gli allievi devono affrontare.

Il problema che presentiamo qui è sufficientemente aperto da invitare all'esplorazione ed alla congettura. Può essere affrontato sia con strumenti di geometria sintetica che con strumenti algebrici. L'analisi dei suoi dati e delle sue variazioni può inoltre condurre in modo naturale al concetto di funzione e alle relative rappresentazioni grafiche, numeriche e simboliche.

[3] Schede tratte dalla sperimentazione di S. Bruno

Scheda per il docente

- **Nucleo**: geometria, relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - costruire il modello geometrico di un problema sia su carta sia utilizzando un software di geometria dinamica;
  - in situazioni problematiche, individuare relazioni tra grandezze e rappresentare come varia una grandezza in relazione ad un'altra utilizzando tabelle, grafici, formule;
  - produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti.
- **Ordine di scuola**:
  - primo e secondo biennio scuola secondaria di II grado.
- **Descrizione attività**:
  - Attività 1: In seguito alla formulazione del problema sulla suddivisione di un campo viene richiesto agli studenti di cercare una soluzione utilizzando gli strumenti del disegno manuale e della calcolatrice.
  - Attività 2: Esplorazione dinamica con GeoGebra.
  - Attività 3: Soluzione algebrica. Il problema viene modellizzato tramite un'equazione di primo grado nella variabile AP = x da cui si ricava una soluzione con la precisione numerica opportuna.
  - Attività 4: Con carta, matita e – eventualmente – calcolatrice si costruisce una tabella numerica che descriva più in dettaglio la variabilità già individuata nell'Attività 2.
  - Attività 5: Studio della variabilità con GeoGebra, nei registri numerico, grafico e simbolico. E' messa a fuoco la dipendenza lineare tra la variabile AP = x e le misure delle aree dei due appezzamenti.
  - Attività 6: Studio della funzione che misura l'appezzamento di Nicola al variare della misura di AP.
  - Attività 7: Studio della funzione che misura l'appezzamento di Giacomo al variare della misura di AP. Il significato dei punti del grafico con riferimento al contesto di partenza.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - Gli allievi dovrebbero conoscere i principali strumenti GeoGebra e saper lavorare sulle diverse Viste. E' inoltre richiesto che conoscano e sappiano risolvere semplici equazioni lineari.

    Il problema può servire a mettere a fuoco i concetti di variabile indipendente e variabile dipendente, di funzione e delle sue rappresentazioni.

    Ulteriori riflessioni possono essere fatte sulle funzioni lineari e sulle relative rappresentazioni. Se gli allievi hanno già incontrato nel corso degli studi tali concetti potranno incrementarne spessore e padronanza attraverso il loro uso strumentale nella modellizzazione. Non è escluso, tuttavia un primo approccio al concetto di funzione nell'analizzare la situazione di variabilità proposta dal problema.

- Le fasi di lavoro si basano sul seguente schema:

  formulazione del problema da parte dell'insegnante → risoluzione degli studenti a piccoli gruppi → discussione plenaria con l'insegnante come moderatore → utilizzo di GeoGebra per verificare le congetture emerse e produrne di nuove.

  Si propone questo schema sia per affrontare il problema principale iniziale, sia per rispondere alle domande successive relative allo stesso problema, sia per affrontare i quesiti che vengono proposti successivamente.

- Attività 1: Gli studenti lavorano a piccoli gruppi. E' opportuno che gli allievi discutano, sperimentino con carta e matita, congetturino prima di passare all'esplorazione dinamica. Devono comprendere il ruolo che ha la posizione del punto P (non nominato volutamente nella figura iniziale) nel determinare la suddivisione del campo secondo i criteri richiesti. Dovrebbero notare che al crescere della misura di AP diminuisce la misura del campo di Nicola.

  In questa fase è ampiamente accettabile che gli studenti producano soluzioni approssimate, riconoscendo ad esempio che per AP prossimo ai 15 metri il campo di Nicola ha la superficie vicina alla misura richiesta (2250 m^2 contro 2286 m^2).

  Nella discussione plenaria l'insegnante sottolineerà il ruolo della posizione di P come variabile chiave del problema e chiederà agli studenti come individuare tale posizione (ad esempio con la misura di AP).

- Attività 2: Gli studenti lavorano a piccoli gruppi. Nell'esplorazione dinamica indagano numericamente sulle relazioni tra la misura di AP (variabile indipendente) e le misure dei due appezzamenti di terreno. Confermano o confutano le congetture precedentemente formulate e giungono ad una soluzione con un miglior grado di approssimazione.

- Attività 3: Lavoro individuale o a piccoli gruppi.

  Nel modellizzare il problema con un'equazione è opportuno – se la questione non è ancora stata posta dagli studenti – evidenziare che il problema ha dei limiti geometrici.

- Attività 3: Lavoro individuale o a piccoli gruppi.

- Attività 4: Lavoro individuale o a piccoli gruppi.

- Attività 5 e 6: A seconda della padronanza degli allievi sulle funzioni lineari l'insegnante sceglierà se far prima svolgere l'attività agli studenti a piccoli gruppi per sistematizzare poi i risultati con una discussione collettiva oppure trattare le questioni delle schede 5 e 6 con la LIM coinvolgendo l'intero gruppo classe. In questo caso stimolerà osservazioni e congetture da parte degli studenti. In particolare:

  - gli studenti dovrebbero notare l'allineamento dei punti sul piano cartesiano; l'insegnante può proporre di inserirne altri in tabella (per esempio per x=3 e x=6) e verificare che i nuovi punti siano ancora allineati con i precedenti.

  - Dalla discussione collettiva dovrebbe emergere che la misura dell'appezzamento può essere riassunta nella formula *area* (x) = 24-x. Risulta dunque più efficace scrivere nel Foglio di calcolo – sostituendo l'incognita x con gli opportuni riferimenti a celle – la formula che permette di calcolare l'area anziché calcolare ad uno ad uno i singoli valori. La stessa formula descrive la funzione lineare che passa per i punti ottenuti dalla tabella.

- ◦ Attività 7: Gli studenti lavorano a piccoli gruppi.
- ◦ Discussione finale: L'insegnante farà osservare che il problema di partenza è stato analizzato con strumenti e modalità diverse:
  - modello geometrico su carta,
  - modello con un software di geometria dinamica,
  - tabella di valori su due colonne,
  - traccia del punto, espressione algebrica, grafico nel piano cartesiano.

  Farà riflettere gli studenti su queste diverse forme di rappresentazione:
  - quale di queste rappresentazioni è più significativa?
  - quale porta con sé più informazioni?

  Ci si aspetta considerazioni del tipo: la soluzione algebrica è più precisa, il grafico aiuta a visualizzare e confrontare soluzioni, …

Solo al termine di tutta l'attività ci sarà la generalizzazione e sistemazione teorica (guidata dall'insegnante, col contributo degli studenti).

- **Tempi:**
  - ◦ Attività 1, discussione plenaria, Attività 2: 2 ore in totale.
  - ◦ Attività 3 e discussione plenaria: 1 ora.
  - ◦ Attività 4 e 5 con discussione plenaria: 2 ore in totale.
  - ◦ Attività 6 e 7 con discussione plenaria: 1 ora e 30 minuti in totale.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Per ogni attività sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Problema: la suddivisione del campo.

Due fratelli devono dividersi un campo a forma di trapezio rettangolo.

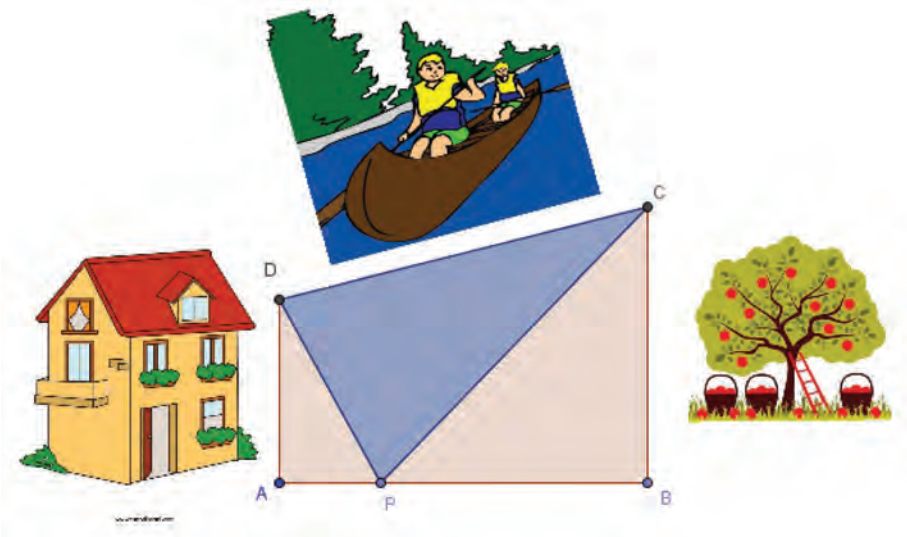
Giacomo vorrebbe un appezzamento lungo il fiume, che si trova lungo il lato obliquo.

Nicola avrebbe bisogno di due appezzamenti, in modo tale da comprendere le due basi del trapezio: su una base, infatti, c'è la sua abitazione mentre lungo l'altra c'è un frutteto a cui non vuole rinunciare.

La suddivisione dovrebbe quindi essere del tipo di quella indicata in figura, tenendo in considerazione i seguenti dati:

- ◦ *l'altezza del trapezio misura 80 m e le basi misurano 40 e 60 m;*
- ◦ *a Nicola spettano i 4/7 del campo.*

Puoi aiutare tu i due fratelli ad effettuare la suddivisione?



Disegna una figura che rappresenti il problema proposto:	Riesci ad individuare una suddivisione che si avvicina alle richieste del problema? Descrivi le considerazioni che hai fatto per arrivare alla soluzione e i calcoli che hai effettuato. Individua i vertici del triangolo di proprietà di Giacomo: di quale vertice è più difficile individuare la posizione? Si può dire che la suddivisione del campo dipenda dalla posizione di tale vertice?

Scheda per lo studente Attività 2

Riprendi il problema della suddivisione del campo ed esplora la situazione con gli strumenti di GeoGebra.

Apri in un nuovo file la Vista Grafica senza gli assi cartesiani e disegna il trapezio ABCD in scala 1:10.

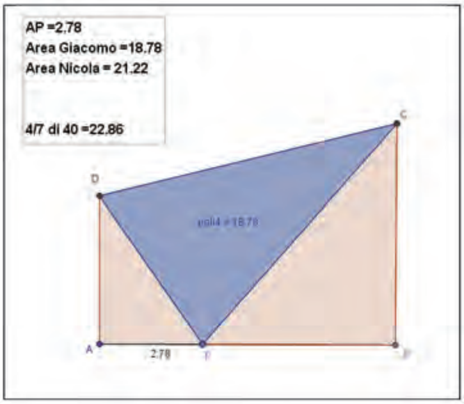
Prendi un punto P variabile sul lato AB (controlla che P si muova soltanto su AB e non su tutto il bordo del trapezio!) e costruisci i tre triangoli ADP, PBC e CPD.

Muovi P e visualizza:

- la misura di AP
- la misura dell'area di CPD
- la misura dell'area dell'unione di APD con PBC.

Valuta le informazioni che ottieni e confrontale con le risposte che avevi dato in precedenza al problema.

Salva il file che hai costruito con il nome *suddivisione_campo*.



Videata Attività 2

Scheda per lo studente Attività 3

Risolvi ora il problema impostando un'equazione di primo grado.

Completa:

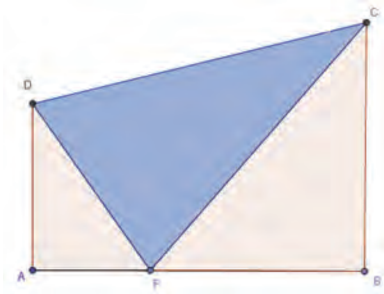
- puoi indicare con la variabile x la misura di ....
- altri dati dipendenti da x sono: ....
- l'equazione risolutiva del problema è ....
- risoluzione dell'equazione:

  ....
- la soluzione trovata soddisfa i limiti imposti dal problema geometrico?
- verifica della soluzione:

  ....

Scheda per lo studente Attività 4

Come varia la misura dell'area che spetta a Nicola al variare della posizione di P sul lato AB?



Per semplificare le cose d'ora in avanti useremo le misure in scala 1:10, come abbiamo già fatto nella figura disegnata in GeoGebra.

Indica la misura di AP con x e individua fra quali valori può variare tale variabile.

Aiutandoti con una calcolatrice trova quindi la misura dell'area che spetta a Nicola nel caso in cui:

- $x = 1$;
- $x = 1/2$ di AB;
- PB è 1/10 di AB;
- $x = 4/7$ di AB;
- $x = 1/4$ di AB.

Completa la tabella seguente con i valori trovati.

Valore di x	**Area Nicola**
1	

Scheda per lo studente Attività 5

Apri un file GeoGebra visualizzando la Vista Grafica con gli assi cartesiani e la griglia; visualizza il Foglio di calcolo.

Riporta nelle prime due colonne del Foglio di calcolo i dati che hai calcolato nella tabella precedente.

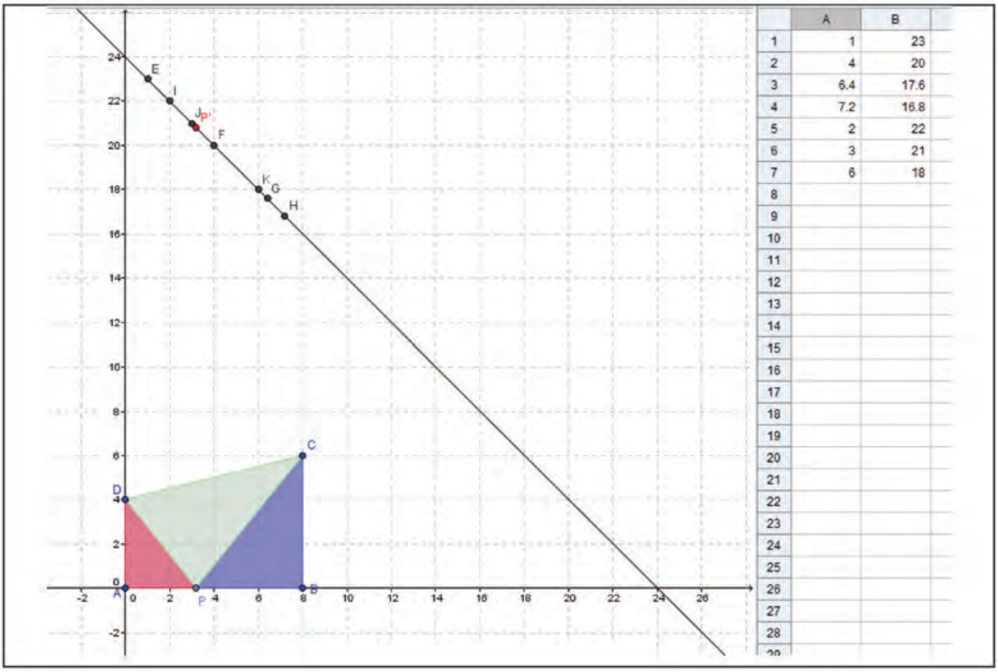
Attraverso il comando *Crea Lista Punti* visualizza i punti corrispondenti sul piano cartesiano.

Come si dispongono tali punti nel piano cartesiano?

Sapresti completare la tabella in modo tale da individuare altri punti che seguano la stessa regolarità?

Individua la funzione che passa per i punti che hai costruito e rappresentane il grafico.

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 5

Scheda per lo studente Attività 6

Analizziamo ancora il problema: il campo di Nicola.

Riapri il file *suddivisione_campo* e visualizza la Vista Grafica 2.

Definisci il punto K che ha per ascissa la misura x di AP e per ordinata la misura della somma delle aree dei triangoli APD e PBC; visualizza K in Vista Grafica 2.

Attiva la traccia di K e muovi P su AB; rispondi alle seguenti domande:

- per quale valore di x l' area è massima?
- per quale valore di x l'area è minima?
- quanto misura l'area se x =7?
- per quale valore di x l'area vale 15?
- al crescere di x l'area cresce o decresce?
- poiché la traccia di un punto è qualcosa di temporaneo, è possibile definire quel grafico nel piano cartesiano tramite un'espressione algebrica? Se si, costruisci tale grafico e coloralo di rosso.

Salva il file che hai costruito con il nome *suddivisione_campo_2.*

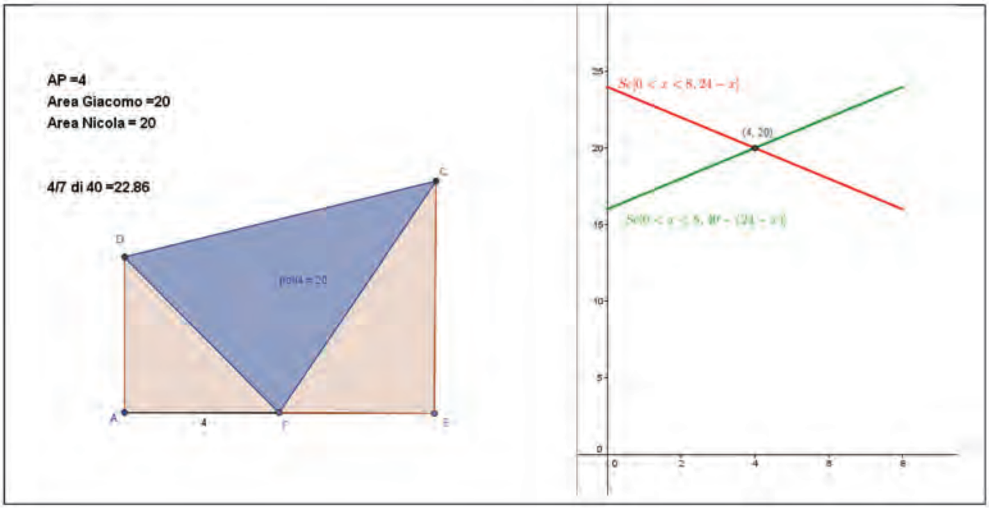
Scheda per lo studente Attività 7

Ora occupiamoci di Giacomo.

Avendo trovato l'equazione e visualizzato il grafico che rappresenta le possibili misure dell'area del campo di Nicola, la stessa cosa può essere fatta per il campo di Giacomo:

- al crescere di *x*, l'area destinata a Giacomo aumenterà o diminuirà?
- Qual è l'espressione che rappresenta l'area del campo di Giacomo? Apri il file *suddivisione_campo_2*; disegna in Vista Grafica 2 il grafico della funzione corrispondente all'area del campo di Giacomo e coloralo di verde.
- Il grafico corrispondente all'area destinata a Giacomo si incontrerà con il grafico dell'area destinata a Nicola? Se si, che cosa rappresentano le coordinate del punto di intersezione?

Salva il file che hai costruito.



Videata Attività 6

2. Il bagnino[4]

Viene qui proposto un classico problema di minimo la cui formulazione originale risale a R. Feynman[5]. La situazione problema consente approcci risolutivi diversi; la tentazione dell'insegnante è quella di ricorrere subito al un modello di una funzione da trattare con i metodi dell'Analisi o, in alternativa, della Fisica (legge di Snell). Un tale grado di astrazione

[4] Schede di P. Accomazzo

[5] L'articolo di L. Frangella dal titolo *Il problema del bagnino con GeoGebra*, tratta ampiamente della questione. http://www.matematicamente.it/il-magazine/245-numero-8-dicembre-2008

rischia di produrre un modello del tutto privo di significato per gli allievi. La nostra proposta è di partire da un approccio *sperimentale*, disegnando in GeoGebra diverse situazioni possibili e rilevando i dati corrispondenti a ciascuna di queste situazioni, proprio come si farebbe con un esperimento di Fisica o di Scienze. Una lettura consapevole dei dati numerici e del grafico che raccoglie le diverse osservazioni condurrà a una soluzione approssimata del problema; solo dopo che gli studenti si saranno fatti un'idea delle relazioni fra dati, del tipo di variabili in gioco e delle dipendenze funzionali si chiederà loro di descrivere algebricamente la situazione problema e si farà riferimento alla legge sulla rifrazione per interpretare il risultato.

Scheda per il docente

- **Nucleo:** relazioni e funzioni.
- **Obiettivi**:
  - Saper modellizzare una situazione problema.
- **Ordine di scuola**:
  - Attività 1, 2 e 3: secondo biennio scuola secondaria II grado.
- **Descrizione attività:**
  - Attività 1: Analisi preliminare del problema. Individuazione dei dati e delle relazioni che costituiranno gli elementi del modello matematico.
  - Attività 2: Formulazione di un modello grafico in GeoGebra; esplorazione dinamica. Dal grafico al modello numerico. Indagine qualitativa sul grafico e sulla tabella: una prima risposta al problema con un valore numerico approssimato alle prime due cifre decimali.
  - Attività 3: Modello algebrico/analitico. Studio del minimo della funzione che definisce il tempo necessario ad A per raggiungere B. Soluzione al problema con il grado di approssimazione consentito dagli strumenti di calcolo.
- **Indicazioni metodologiche**:
  - L'insegnante può porre il problema in modo più o meno aperto, a seconda del tempo che ha a disposizione e dell'abitudine degli allievi al confronto ed alla discussione. Gli studenti lavoreranno a piccoli gruppi sulle schede predisposte. Importante che al termine di ogni fase di lavoro di gruppo vengano definiti, attraverso una discussione collegiale orchestrata dall'insegnante, i punti fermi condivisi da tutti necessari al proseguimento dello studio.
  - L'Attività 1 ha lo scopo di far lavorare gli studenti sull'interpretazione del testo del problema. Dalla discussione collegiale che segue dovrebbe emergere che
    - il percorso da A a B di minima distanza non corrisponde in generale al percorso con il minor tempo;
    - per definire le posizioni di A e B è opportuno lavorare sul piano cartesiano, assumendo come retta r l'asse delle ascisse. In tal caso A e B devono stare

su semipiani opposti rispetto all'asse x; la loro posizione può essere fissata definendo A e B da Barra di inserimento attraverso precise coordinate (nelle videate rappresentative A=(10,0) e B=(14,-4)).

- P deve stare sul segmento che ha per estremi i punti proiezione di A e di B sull'asse x.

- Nell'Attività 2 si passa alla modellizzazione grafica e numerica del problema con gli strumenti GeoGebra ed alla visualizzazione dinamica della situazione. Il modello numerico sfrutta alcuni dati forniti automaticamente dal software, come le misure delle distanze di AP e di PB.

  Osservando il grafico e la tabella numerica corrispondente si può dare una valutazione approssimata della soluzione al problema

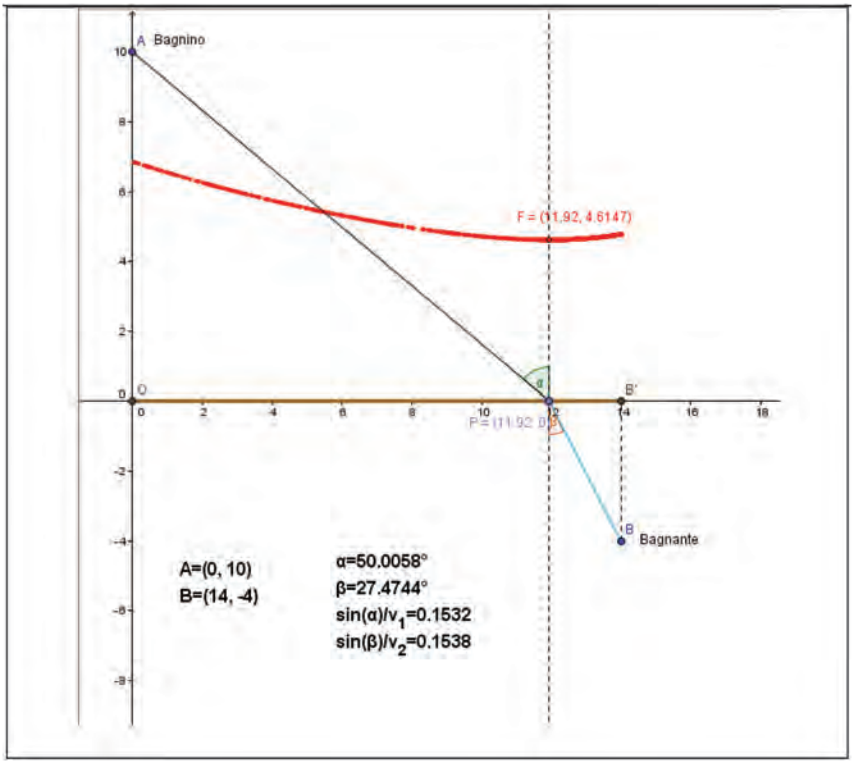
- L'Attività 3 richiede la costruzione di un modello algebrico. Scelta come variabile indipendente x la misura della proiezione di AP sull'asse delle ascisse (che coincide con l'ascissa di P se A è un punto dell'asse y) si chiede agli studenti di ricavare le formule $d_1(x)$ e $d_2(x)$ delle misure di AP e di PB e di ricavare il tempo totale di intervento del bagnino applicando la relazione $tempo = \frac{spazio}{velocità}$. Si può decidere se limitare il grafico della funzione ottenuta all'intervallo dell'asse x che ha per estremi le proiezioni di A e di B o far disegnare la funzione su tutto R per percepirne meglio l'andamento.

  Lo studio analitico della funzione non è dei più semplici: si tratta infatti di una funzione razionale fratta. Si può chiedere agli studenti di calcolare con carta e matita la derivata prima, ma la ricerca degli zeri di tale derivata è complessa. Suggeriamo di ricorrere al CAS di GeoGebra, privilegiando l'attenzione alla procedura (ovvero alla scelta ragionata dei passi da compiere per arrivare alla soluzione) più che all'esecuzione di calcoli algebrici lunghi e complessi.

  Naturalmente sarà richiesto un controllo critico delle soluzioni fornite automaticamente da GeoGebra.

- Un ulteriore modo per interpretare teoricamente la soluzione ottenuta in via sperimentale nell'Attività 2 è quello di rifarsi alla legge fisica della rifrazione. Diamo qui alcune indicazioni in proposito senza costruire una scheda di lavoro specifica per lo studente.

  Partendo dal file *bagnino_1* si possono far misurare da GeoGebra gli angoli α e β formati rispettivamente da AP e da PB con la verticale passante per P. Si visualizzino quindi i due rapporti $\frac{\sin\alpha}{v_1}$ e $\frac{\sin\beta}{v_2}$: i due rapporti daranno lo stesso risultato quando P raggiungerà il punto corrispondente al minimo tempo di percorso da A a B. Risulta così verificata la relazione espressa dalla legge di Snell.



- **Tempi:**
  - Attività 1 con discussione: 40 minuti.
  - Attività 2 con discussione: 1 ora.
  - Attività 3 con discussione e sistemazione finale : 1 ora e 30 minuti.

 Schede per lo studente Attività 1, 2, 3.

Per le attività sono riportati esempi di videate relative ai vari casi.

Scheda per lo studente Attività 1

Problema: Il bagnino

Un bagnino, fermo sulla spiaggia in un punto A, vede una bagnante in mare in un punto B, in seria difficoltà. Il bagnino riesce a correre sulla sabbia alla velocità massima di 5 m/s e nuota alla velocità di 3 m/s; inoltre la linea di passaggio fra sabbia e mare è rettilinea.

In quale punto P deve gettarsi in acqua il bagnino per raggiungere la bagnante nel minor tempo possibile?

Schematizza la situazione con un disegno. Supponi che la linea di separazione fra la spiaggia ed il mare sia una linea retta (r): P deve essere un punto di tale retta.

Analizza un caso particolare: il segmento che unisce A con B è perpendicolare alla retta r. Passa quindi ad una situazione più generale: AB non è perpendicolare ad r. Fissa due punti del piano corrispondenti alle posizioni di A e di B; inserisci i dati necessari a definire le posizioni di A e B nel piano. Di conseguenza, prova ad ipotizzare diverse posizioni di P su r e calcola il tempo che impiega A a raggiungere B in ciascuno dei casi.

Si può dire, in generale, che il percorso di minima lunghezza coincida con il percorso di minimo tempo?

Scheda per lo studente Attività 2

Esplora il problema con GeoGebra: apri la Vista Grafica con gli assi cartesiani.

Assumi l'asse x come retta r che delimita la spiaggia dal mare; fissa due punti A e B che si trovino in semipiani opposti rispetto ad r. Individua i punti A' e B' proiezione di A e B sull'asse x e prendi un punto P variabile sul segmento A'B'.

Definisci le due costanti velocità: $v_1=5$ e $v_2=3$.

Individua le misure automatiche che GeoGebra ricava per le lunghezze dei segmenti AP e PB e attraverso la relazione $tempo = \frac{spazio}{velocità}$ ricava i tempi t_1 e t_2 che il bagnino impiega rispettivamente a percorrere il tratto di spiaggia AP ed il tratto di mare PB per raggiungere la bagnante.

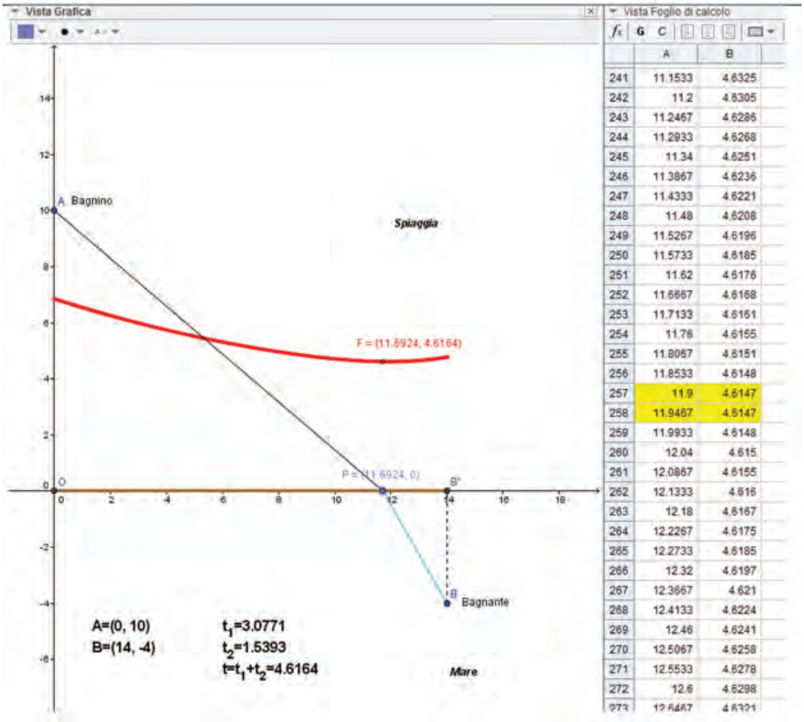
Costruisci per punti il grafico che mette in relazione la posizione del punto P in cui il bagnino entra in acqua con il tempo impiegato per raggiungere la bagnante: dalla Barra di inserimento costruisci il punto K che ha la stessa ascissa di P e come ordinata la somma di t_1 e t_2.

Visualizza anche il Foglio di calcolo.

Attiva la traccia di K e la registrazione delle sue coordinate sul Foglio di calcolo. Muovi P ed osserva l'andamento del grafico e la tabella numerica corrispondente alle posizioni di K.

Quale risposta puoi dare al problema?

Salva il file che hai costruito con il nome *bagnino_1*.



Videata Attività 2

Scheda per lo studente Attività 3

Qual è l'equazione della curva che definisce il tempo impiegato dal bagnino per raggiungere la bagnante in funzione del punto di ingresso in acqua?

Apri il file *bagnino_1*. Devi costruire formula e grafico della funzione che passa per i punti di cui hai disegnato la traccia.

Assumi come variabile indipendente OP = x, ovvero l'ascissa di P.

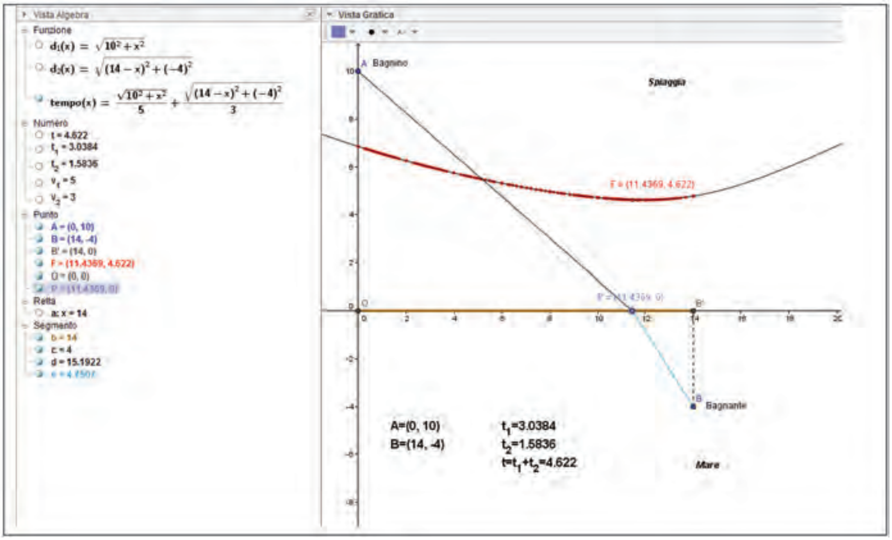
Calcola le distanze AP e PB nella variabile x ed assegna le due formule rispettivamente a $d_1(x)$ e a $d_2(x)$.

Definisci la funzione *tempo*(x) come $\dfrac{d_1(x)}{v_1}+\dfrac{d_2(x)}{v_2}$ Disegna il grafico della funzione *tempo*(x).

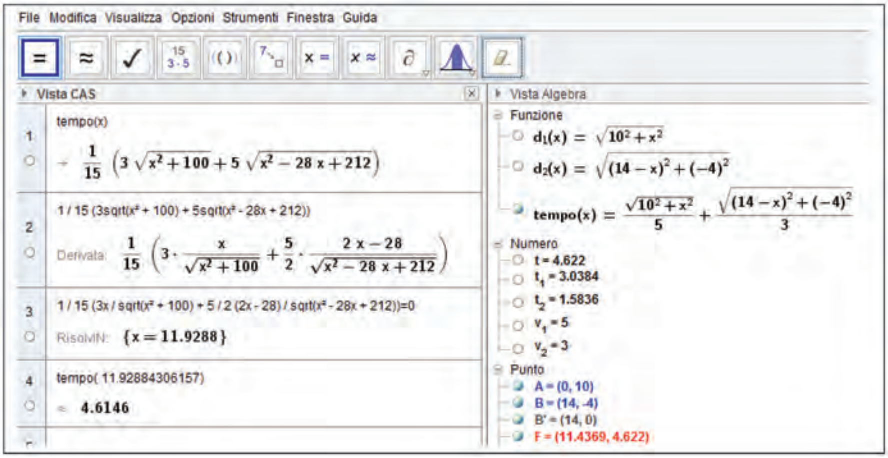
Per trovare il *minimo* assunto dalla funzione, studiane la sua derivata prima: puoi farlo con carta e matita oppure ricorrendo all'ambiente CAS di GeoGebra.

Confronta il risultato ottenuto algebricamente con ciò che avevi ricavato da un'osservazione qualitativa del grafico a punti e della tabella numerica corrispondente.

Salva il file che hai costruito con il nome *bagnino_2*.



Videata Attività 3_1



Videata Attività 3_2

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Accomazzo, P., Beltramino, S. & Sargenti, A. (2013). *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*. Milano: Ledizioni.

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., Sabena, C. & Soury-Lavergne, S. (2013). *The meta-didactical transposition: a model for analysing teachers education programs*. Proceedings of PME37, Kiel, Germany, 97-124.

Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., Martignone, F., Robutti, O., & Sabena, C. (2012). Vent'anni dopo: Pisa 1991 – Rimini 2012 Dalla ricerca in didattica della matematica alla ricerca sulla formazione degli insegnanti, XXIX SEMINARIO NAZIONALE DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA (http://www.seminariodidama.unito.it/mat12.php)

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). *Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programmes*. In The Mathematics Teacher in the Digital Era (pp. 347-372). Springer Netherlands.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. 34(3); 66-72.

Arzarello, F., Ferrara, F. & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications*, vol. 31, 20-30.

Arzarello F. & Robutti O. (2010). Multimodality in multi-representational environments. *ZDM – The International Journal On Mathematics Education*, Vol. 42(7); P. 715-731, Issn: 1863-9690

Bardelle, C., Beltramino, S., Berra, A., Dalè, M., Ferrando, E., Gentile, E., Idrofano, C., Mattei, M., Panero, M., Poli, L., Robutti, O. & Trinchero, G. (2014). *How a street lamp, paper folding, and GeoGebra can contribute to teachers' professional development*. CIEAEM 66 - 2014 Lyon

Beutelspacher, A. & Wagner, M. (2009). *Piega e spiega la matematica. Laboratorio di giochi matematici.* Ed Ponte alle Grazie

Bibbona, E., Boggiatto, P., Carypis, E., De Simone, M. & Panero, M. (2014). *Gare e giochi matematici: studenti all'opera*. Milano: Ledizioni.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.19, 2, 221-266.

Clark-Wilson, A., Aldon, G., Cusi, A., Goos, M., Haspekian, M., Robutti, O. & Thomas, M. (2014). *The challenges of teaching mathematics with digital technologies*. In: P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, vol. 1, 87-116. Vancouver, Canada: PME.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213–234

Fischbein, E. (1993). The Theory of figural concepts, *Educational studies in mathematics*, 24,139-162.

García, F.J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*. 38(3), 226-246.

Heid, M. K. & Blume, G. W. (2008). Algebra and function development, in Heid, M. K. and Blume, G. W. (eds), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research Syntheses* , (Vol. 1, pp. 55-108), Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hegedus, S.J. & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. 41 (4), 399-412.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2009). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135-146.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187-211.

Kaput, J., Hegedus, S. & Lesh, R. A. (2007) Technology becoming infrastructural in mathematics education. In: Lesh, R. A., Hamilton, E. and Kaput, J. J. (Eds), *Foundations for the future in mathematics education* , Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 173-191

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-21.

Laborde, C., Hollebrands, K., Kynigos, C. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez& P. Boero (Eds.) *Handbook on Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 275-304.

Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Jones, K., Lu, A., & Dawes, M. (2010). Establishing a Professional Development Network around Dynamic Mathematics Software In England, *International Journal for Technology in Mathematics Education,* Volume 17, n. 4, 177-182.

Margolinas, C. (2013). *Task Design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22.

Marrades, R. & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Indicazioni nazionali per il licei*. Allegato F (D.M. 211 del 7 ottobre 2010).

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Il Piano Lauree Scientifiche - Linee guida.* 29 aprile 2010

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Indicazioni nazionali per il Primo Ciclo.*

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). *Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali.*

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J. & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives, *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99-111.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), 203-233.

Olivero, F. & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving. Internat*ional Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. Volume 12, Number 2; p. 135-156.

Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2001). Approaching theoretical thinking within a dynamic geometry environment. *L'educazione matematica*, 3(3), 127-148.

Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representations at the interface of the body and culture*, 171-218. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Resta, L., Gaudenzi, S. & Alberghi, S. (2011). *Matebilandia. Laboratorio di matematica e modellazione in un parco divertimenti*. Ed. Springer Verlag, collana Convergenze.

Robutti, O. (2013). The GeoGebra Institute of Torino, Italy: Research, Teaching Experiments, and Teacher Education. In: P. M. Pumilia-Gnarini, E.Favaron, E. Pacetti, J. Bishop & L. Guerra (Eds.) *Handbook of Research on Didactic Strategies and Technologies for Education: Incorporating Advancements*, Hershey: Information Science Reference, vol. 1, 492-502.

Robutti, O. & Sargenti, A. (2012). GeoGebra Institute of Torino: ricerca, formazione docenti, sperimentazioni. In: M. Mosca &O. Robutti (Eds.) *Atti del V Convegno Nazionale di DIdattica della FIsica e della MAtematica. DI.FI.MA. 2011. Il curriculum di matematica e di fisica nella scuola del III millennio: infanzia, primaria, secondaria di primo e secondo grado*. Torino, 5-7 ottobre 2011, 441-450, Torino: Kim Williams Books.

Robutti, O. (2013). *Dynamic representations with GeoGebra in teacher professional development*. Proceedings CIEAEM 65 - Quaderni di Ricerca in Didattica n.23 supplemento1: Palermo (http://math.unipa.it/~grim/quaderno23_suppl_1.htm)

Ruthven, K. & Hennessy, S. (2002) A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning, *Educational Studies in Mathematics*, 49 (1), 47-88

Sinclair, N. & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry, *Third International Handbook of Mathematics Education*, Springer, New York, pp. 571- 596.

UMI, (2001), *Matematica 2001*: Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media), XXII Convegno UMI-CIIM, Ischia

UMI, (2003), *Matematica 2003*, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica, Ciclo secondario, Viareggio

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*, Cambridge: Cambridge University Press.

http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

http://seminariodidama.unito.it/mat12.php

http://www.progettolaureescientifiche.eu

http://community.geogebra.org/it/

http://difima.i-learn.unito.it/

http://risorsedocentipon.indire.it

http://www.matematicamente.it/il-magazine/245-numero-8-dicembre-2008

http://www.edumatics.mathematik.uni-wuerzburg.de/it

http://www.filippin.it/morin/attivita/supermath2010/scimemi.pdf