

La successione di Fibonacci, il numero aureo, la spirale logaritmica aurea

Carmen Carano¹

Sunto: In questo lavoro si definisce una successione logaritmica (e in particolare aurea) di punti nel piano, si introduce una generalizzazione della successione di Fibonacci e si vede come questa è in relazione con la successione $\{\varphi^i\}$, dove φ è il numero aureo e i varia in $\mathbb{Z}$; infine si dimostra come si può costruire una successione logaritmica di punti, e quindi una spirale logaritmica, che in un caso particolare, risulta aurea.

Abstract: In this job we define a logarithmic succession (and in particular a golden succession) of points in the plane, then we introduce a generalization of Fibonacci's succession and we indicate how it is connected with the succession $\{\varphi^i\}$, where φ is the golden number and i is a number of $\mathbb{Z}$; at last we show how it is possible to make a logarithmic succession of points and, from here, a logarithmic spiral that, in a particular case, is a golden spiral.

Parole chiave: Coordinate polari, progressioni aritmetiche e geometriche, sezione aurea, spirale logaritmica, spirale aurea.

¹ Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" - Campobasso. E-mail: c.carano@tiscalinet.it

Di seguito chiameremo successioni anche elenchi ordinati di elementi con indici in Z ; si tratta di elenchi ordinati che si possono pensare come unioni di due successioni con lo stesso primo elemento: una con indici crescenti ($a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$) e una con indici decrescenti ($a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$).

DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE LOGARITMICA DI PUNTI

In un riferimento polare i punti di una successione $\{P_i\}$, con anomalie in progressione aritmetica e con moduli in progressione geometrica, appartengono ad una spirale logaritmica. In base a tale proprietà, definiremo logaritmica una successione di punti $\{P_i\}$ per i quali in un riferimento polare di polo O si verificano le seguenti uguaglianze:

$$\widehat{P_i O P_{i+1}} = \alpha \quad , \quad \frac{\overline{OP_{i+1}}}{\overline{OP_i}} = \lambda \quad \forall i \in Z$$

(i moduli di tali punti costituiscono quindi una successione del tipo $\{c\lambda^i\}$). I punti P_i individuano una spirale logaritmica di equazione polare:

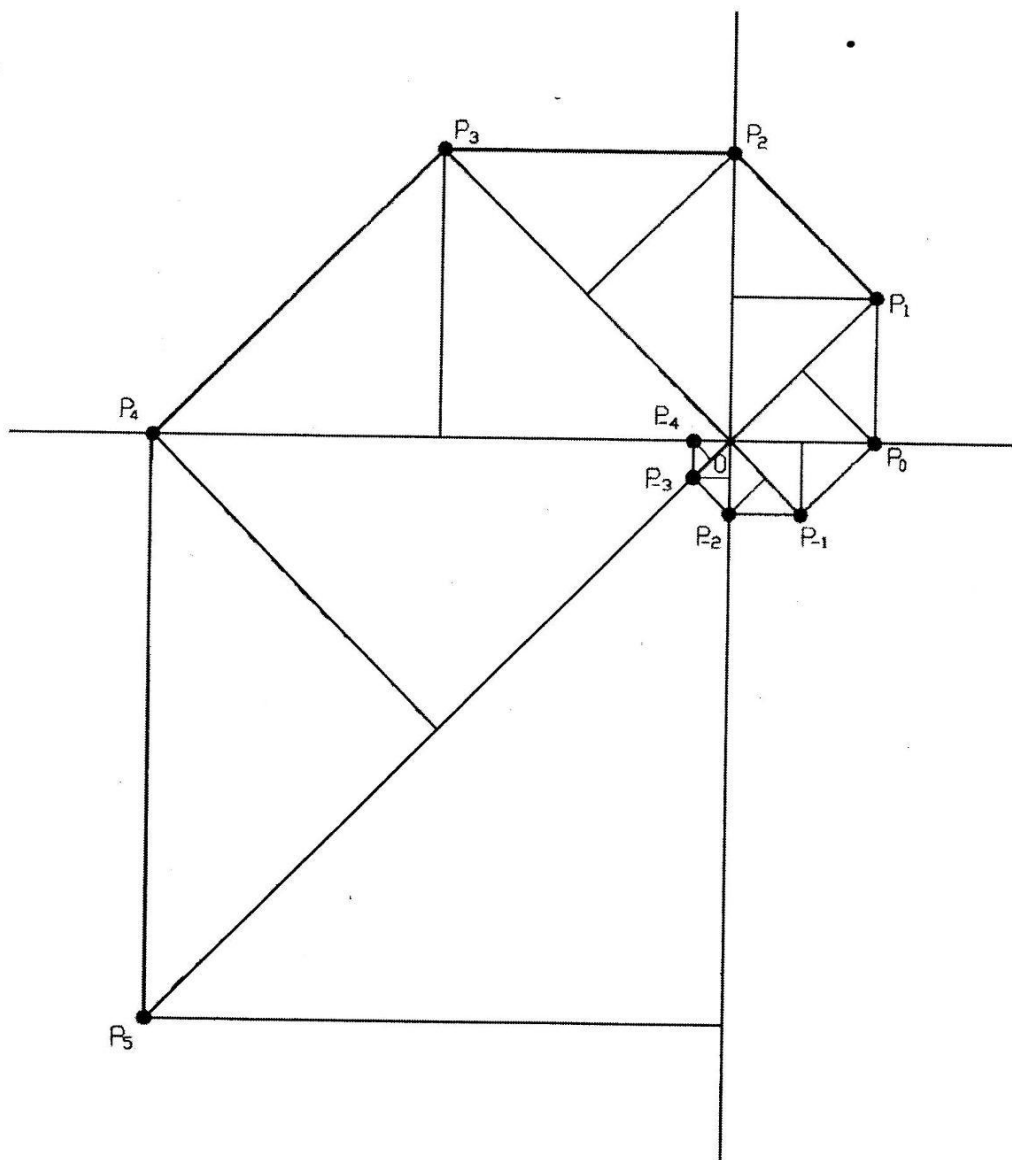
$$\rho = k e^{\frac{\ln \lambda}{\alpha} \vartheta}$$

e quindi:

$$\rho = k \lambda^{\frac{\vartheta}{\alpha}}$$

Per esempio, se si considera una serie di quadrati aventi un vertice in O e tali che la diagonale di ognuno di essi avente un estremo in O sia il lato del quadrato successivo (spostandosi in senso orario o antiorario), la successione degli estremi di tali diagonali, diversi da O , è una successione logaritmica di punti per i quali

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \lambda = \sqrt{2}$$



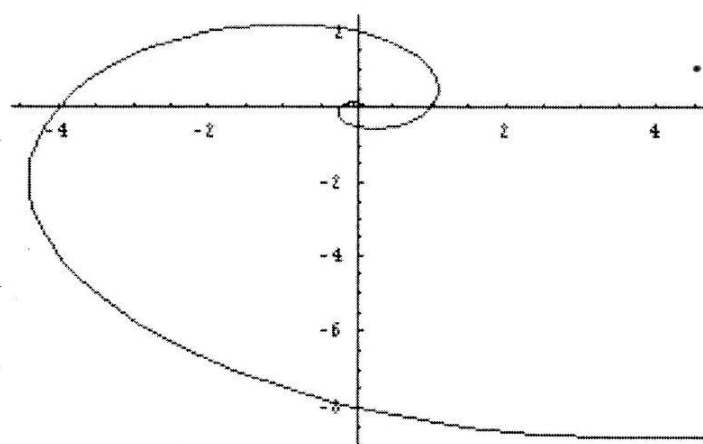
che individuano la spirale logaritmica di equazione

$$\rho = k \left(\sqrt{2} \right)^{\frac{4\theta}{\pi}}$$

e quindi

$$\rho = k \cdot 2^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

Di seguito riportiamo il grafico di tale spirale nel caso che sia $k = 1$ ($\rho(P_0)=1$).



In particolare, se $\lambda = \varphi$ (dove φ è il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea), definiremo la successione $\{P_i\}$ una successione logaritmica aurea (i moduli di tali punti costituiscono una successione del tipo $\{c\varphi^i\}$). In tal caso la spirale individuata dai punti P_i è una spirale aurea che dipende dai valori di k e di α , di equazione:

$$\rho = k\varphi^{\frac{\theta}{\alpha}}$$

LA SUCCESSIONE $\{\varphi^i\}$

Il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea è pari al numero aureo

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

quindi φ^{i-1} è la lunghezza della parte aurea del segmento di lunghezza φ^i per ogni valore di i appartenente a $\mathbb{Z}$. Se il segmento AB ha lunghezza φ^i , la sua parte aurea AC ha lunghezza φ^{i-1} e la parte rimanente CB (che è la parte aurea di AC) ha lunghezza φ^{i-2} . Sarà quindi, per ogni i appartenente a $\mathbb{Z}$,

$$\varphi^i = \varphi^{i-1} + \varphi^{i-2} \tag{1}$$

$$(\varphi^{i-1})^2 = \varphi^i \varphi^{i-2} \tag{2}$$

GENERALIZZAZIONE DELLA SUCCESSIONE DI FIBONACCI E RELAZIONE TRA QUESTA E LA $\{\varphi^i\}$

La successione di Fibonacci $\{f_n\}$ (con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per $n > 1$) può essere generalizzata in Z in $\{f_i\}$ (con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ per ogni i appartenente a Z). Sarà quindi:

$$\{f_i\} = \{\dots -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

Per tale successione risulta:

$$f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \quad (3)$$

e

$$(f_{i-1})^2 = f_i f_{i-2} \begin{cases} +1 & \text{se } i \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases} \quad (4)$$

Queste due relazioni che caratterizzano tale successione differiscono da quelle che caratterizzano la successione $\{\varphi^i\}$ a causa del termine $+1$ o -1 nella seconda; tale termine tende a diventare sempre più influente al crescere di i (cioè al crescere di i , f_{i-1} si avvicina sempre più alla parte aurea di f_i).

Binet ha dimostrato, per ogni n appartenente a N , la seguente relazione tra la $\{f_n\}$ e la $\{\varphi^n\}$:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Tale relazione continua a essere valida anche tra le successioni $\{f_i\}$ e $\{\varphi^i\}$, per ogni i appartenente a Z :

$$f_i = \frac{\varphi^i - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^i}{\sqrt{5}} \quad (5)$$

È facile, partendo dalla (1), determinare la relazione inversa:

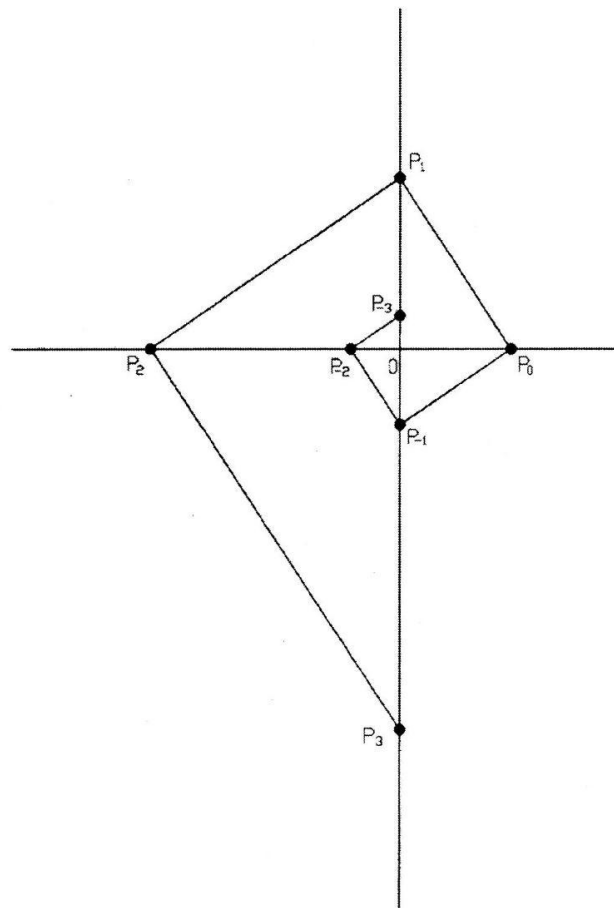
$$\varphi^i = f_i \varphi + f_{i-1} \quad (6)$$

valida, anch'essa per ogni i appartenente a Z .

COSTRUZIONE DI UNA SUCCESSIONE LOGARITMICA DI PUNTI

È possibile ottenere molto facilmente una successione logaritmica di punti nel piano nel seguente modo.

A partire da un punto P_0 qualsiasi sul semiasse positivo delle ascisse (per esempio $P_0(1, 0)$), si tracci un segmento (che non giaccia sull'asse x e che non sia ad esso perpendicolare) il cui secondo estremo P_1 sia sul semiasse positivo dell'asse y con ordinata diversa da 1. A partire dal segmento P_0P_1 si costruiscano, per i appartenente a $\mathbb{Z}$, i segmenti P_iP_{i+1} perpendicolari tra loro e con gli estremi alternativamente sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate.



La $\{P_i\}$ è una successione logaritmica di punti per la quale

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \lambda = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_0}}$$

Infatti, per il secondo teorema di Euclide, è

$$\overline{OP_i}^2 = \overline{OP_{i-1}} \cdot \overline{OP_{i+1}}$$

Sarà quindi:

$$\overline{OP_{i+1}} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OP_{i-1}}} \cdot \overline{OP_i}$$

Essendo i triangoli OP_iP_{i+1} simili, il rapporto

$$\frac{\overline{OP_i}}{\overline{OP_{i-1}}} = \lambda$$

con λ costante. Quindi la $\{P_i\}$ individua una spirale logaritmica di equazione polare

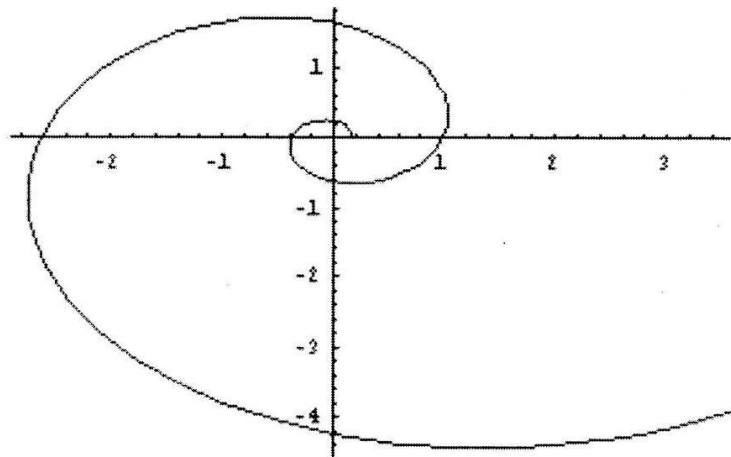
$$\rho = \lambda^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

(Se $\lambda = 2$, tale spirale coincide con quella dell'esempio di pag. 32).

Se $\lambda = \varphi$ si ottiene una successione aurea di punti che individua la spirale aurea di equazione polare:

$$\rho = \varphi^{\frac{2}{\pi}\theta}$$

(in tal caso $\rho(P_i) = \rho(P_{i-1}) + \rho(P_{i-2}) = \varphi^i$ dove φ^i può essere calcolato, per ogni valore di i , dalla (6)).



BIBLIOGRAFIA

- [1] G. LORIA, *Storia delle Matematiche*, Hoepli, Milano, 1962.
- [2] L. CAMPEDELLI, *Lezioni di geometria*, Cedam, Padova, 1966.
- [3] E. TORRICELLI, *De infinitis spiralibus* (trad. E. Carruccio),
“Quaderni di Storia e critica della Scienza”, n° 3, 1955.