

SULLE SERIE ALTERNATE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} \quad (\text{con } s \text{ dispari})$$

Carmen Carano¹

Sunto: In questo lavoro, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni $y = x^s$, con s numero naturale dispari, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie alternate

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}.$$

Abstract: In this work, starting from the development in series of Fourier of the functions $y = x^s$, with s an uneven natural number, we obtain a recursive formula for the computation of the sums of the

alternated series $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$.

Parole chiave: funzione pari, funzione dispari, serie di funzioni, prolungamento periodico, serie trigonometrica, serie di Fourier, sviluppo in serie di Fourier.

1. Introduzione

In un articolo pubblicato su questo periodico² si dimostra come, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier³ dei prolungamenti

¹ Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" - Campobasso. E-mail: c.carano@tiscali.it

² Cfr. C. Carano, *Sulle serie armoniche generalizzate*, Periodico di Matematiche, n. 3, 2008.

periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale pari) definite in $[-\pi; \pi]$, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie armoniche generalizzate $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

In questo articolo, procedendo allo stesso modo per le funzioni $y = x^s$, con s numero naturale dispari, si ottiene a una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie alternate $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$.

³ Data una funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π e integrabile nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, si definisce serie di Fourier di $f(x)$ la serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

in cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

con $n=1, 2, 3, \dots$

La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ converge e ha come somma proprio la $f(x)$ se è verificato il teorema di Dirichlet: se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π , continua a tratti nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, (cioè se in $[-\pi; \pi]$, è continua o ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie) e se tale intervallo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali $f(x)$ è monotona, allora la serie di Fourier di $f(x)$ è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la somma $\hat{f}(x)$ della serie nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, è così definita: $\hat{f}(x) = f(x)$ nei punti $x \in]-\pi; \pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti sinistro e destro della $f(x)$ nei punti di discontinuità dell'intervallo $]-\pi; \pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti della $f(x)$ per x che tende a $-\pi$ da destra e per x che tende a π da sinistra per $x = -\pi$ e per $x = \pi$.

2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale dispari) definite in $[-\pi; \pi]$

I prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale dispari), definite nell'intervallo $[-\pi; \pi]$, verificano le condizioni del teorema di Dirichlet; quindi la serie di Fourier $\hat{f}(x)$ di ognuna di tali funzioni è così definita: $\hat{f}(x) = x^s$ per ogni $x \in]\pi; \pi[$ e $\hat{f}(\pm\pi) = (-\pi^s + \pi^s) / 2 = 0$.

I coefficienti di Fourier di tali funzioni, dato che x^s e $x^s \cdot \cos(nx)$ sono funzioni dispari e $x^s \cdot \sin(nx)$ è una funzione pari, sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^s dx = 0 \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^s \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^s \sin(nx) dx$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$

3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, definite in $[-\pi; \pi]$ e calcolo delle somme delle serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}$

(In quanto segue, tenere presente che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\sin(n\pi/2)$ è uguale a 0 per n pari e alternativamente a 1 o a -1 per n dispari)

□ $y = x$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} =$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \right) \cos(n\pi) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \right) (-1)^n$$

Sarà quindi per ogni $x \in]-\pi; \pi [$:

$$x = \frac{2}{\pi} \left(-\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx) \right)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \left(\pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \right) \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}}$$

$$\square \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}^3$$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $\mathbf{y} = \mathbf{x}^3$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^3 \text{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^3 \cos(nx)}{n} + \frac{3x^2 \text{sen}(nx)}{n^2} + \frac{6x \cos(nx)}{n^3} - \frac{6 \text{sen}(nx)}{n^4} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3}{n} + \frac{6\pi}{n^3} \right) \cos(n\pi) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3}{n} + \frac{6\pi}{n^3} \right) (-1)^n \end{aligned}$$

Sarà quindi, per ogni $x \in]-\pi; \pi [$:

$$x^3 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{\pi^3}{n} + \frac{6\pi}{n^3} \right) (-1)^n \text{sen}(nx) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi^3}{n} - \frac{6\pi}{n^3} \right) (-1)^{n+1} \text{sen}(nx)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^3}{8} &= \frac{2}{\pi} \pi^3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} 6\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \text{sen}\left(n \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi^3}{8} &= \frac{2}{\pi} \left(\pi^3 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) + 6\pi \left(-1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{125} + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\pi^3}{8} = \frac{2}{\pi} \pi^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{2}{\pi} 6\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$$

da cui si ricava che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{1}{12} \left(-\frac{\pi^3}{8} + 2\pi^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\square \quad y = x^5$$

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $y = x^5$, definita in $[-\pi; \pi]$, sono:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^5 \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x^5 \cos(nx)}{n} + \frac{5x^4 \operatorname{sen}(nx)}{n^2} + \frac{20x^3 \cos(nx)}{n^3} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{60x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n^4} - \frac{120x \cos(nx)}{n^5} + \frac{120 \operatorname{sen}(nx)}{n^6} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5} \right) \cos(n\pi) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5} \right) (-1)^n \end{aligned}$$

Sarà quindi per ogni $x \in]-\pi; \pi [$:

$$x^5 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5} \right) \cdot \operatorname{sen}(nx)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^5}{32} &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi^5}{2k-1} - \frac{20\pi^3}{(2k-1)^3} + \frac{120\pi}{(2k-1)^5} \right) \\ \frac{\pi^5}{32} &= \frac{2}{\pi} \pi^5 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} - \frac{2}{\pi} 20\pi^3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} + \frac{2}{\pi} 120\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} \end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} = \frac{1}{240} \left(\frac{\pi^5}{32} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{5\pi^5}{4} \right) = \frac{5}{1536} \pi^5}$$

4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica

serie alternata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$ **con s numero naturale dispari.**

Generalizzando le formule ottenute nel paragrafo precedente per il calcolo di $\frac{\pi^s}{2^s}$ con $s = 1, 3, 5$ al caso di s numero naturale dispari qualunque, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^s}{2^s} &= 2\pi^{s-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - 2s(s-1)\pi^{s-3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} + 2s(s-1)(s-2)(s-3) \cdot \\ &\cdot \pi^{s-5} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} + \dots + (-1)^{\frac{s-3}{2}} 2s(s-1)(s-2) \cdot \dots \cdot 2\pi^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{s-2}} + \\ &+ (-1)^{\frac{s-1}{2}} 2s! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} \end{aligned}$$

e quindi:

$$(-1)^{\frac{s-1}{2}} 2s! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} = \frac{\pi^s}{2^s} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^i \pi^{s-2i+1} \frac{s!}{(s-2i+2)!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{2i-1}}$$

da cui si ottiene la seguente formula ricorsiva:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s} = (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{\pi^s}{2^{s+1} \cdot s!} + \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} (-1)^i \left(\frac{\pi^{s-2i+1}}{(s-2i+2)!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{2i-1}} \right) \right)$$

BIBLIOGRAFIA

- 1) L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna, 1748.
- 2) L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, pp. 123-134.
- 3) J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.
- 4) G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométrique*, Jour. Für Math., IV (1828).3