SULLE SERIE ALTERNATE $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$ (*con s dispari*)

Carmen Carano[1]

Sunto: In questo lavoro, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni $y = x^s$, con *s* numero naturale dispari, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie alternate $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$.

Abstract: In this work, starting from the development in series of Fourier of the functions $y = x^s$, with *s* an uneven natural number, we obtain a recursive formula for the computation of the sums of the alternated series $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$.

Parole chiave: funzione pari, funzione dispari, serie di funzioni, prolungamento periodico, serie trigonometrica, serie di Fourier, sviluppo in serie di Fourier.

1. Introduzione

In un articolo pubblicato su questo periodico[2] si dimostra come, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier[3] dei prolungamenti

[1] Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" - Campobasso. E-mail: c.carano@tiscali.it
[2] Cfr. C. Carano, *Sulle serie armoniche generalizzate*, Periodico di Matematiche, n. 3, 2008.

DOI: 10.14672/67051238

periodici delle funzioni y = x^s (con s numero naturale pari) definite in [-π; π], si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie armoniche generalizzate $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

In questo articolo, procedendo allo stesso modo per le funzioni y = x^s, con *s* numero naturale dispari, si ottiene a una formula ricorsiva per il calcolo delle somme delle serie alternate $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$.

---

[3] Data una funzione f(x), periodica di periodo 2π e integrabile nell'intervallo [-π;π], si definisce serie di Fourier di f(x) la serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n sen(nx))$$

in cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx$$

con *n* =1, 2, 3,……….

La serie di Fourier di una funzione *f*(*x*) converge e ha come somma proprio la *f*(*x*) se è verificato il teorema di Dirichlet: se *f*(*x*) è una funzione periodica di periodo 2π, continua a tratti nell'intervallo [-π;π], (cioè se in [-π;π], è continua o ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie) e se tale intervallo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali *f*(*x*) è monotona, allora la serie di Fourier di *f*(*x*) è convergente per ogni *x*∈R e la somma $\hat{f}(x)$ della serie nell'intervallo [-π;π], è così definita: $\hat{f}(x)$ = *f*(*x*) nei punti x∈]-π; π [, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti sinistro e destro della *f*(*x*) nei punti di discontinuità dell'intervallo]-π; π [, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti della *f*(*x*) per *x* che tende a - π da destra e per *x* che tende a π da sinistra per *x* = - π e per *x* = π.

.

2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni y = x^s (con s numero naturale dispari) definite in [-π;π]

I prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero naturale dispari), definite nell'intervallo [-π;π], verificano le condizioni del teorema di Dirichlet; quindi la serie di Fourier $\hat{f}(x)$ di ognuna di tali funzioni è così definita: $\hat{f}(x) = x^s$ per ogni x∈]π;π [e $\hat{f}(\pm\pi) = (-\pi^s + \pi^s)/2 = 0$.

I coefficienti di Fourier di tali funzioni, dato che x^s e $x^s \cdot \cos(nx)$ sono funzioni dispari e $x^s \cdot sen(nx)$ è una funzione pari, sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^s dx = 0 \qquad\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^s \cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^s sen(nx) dx$$

con n =1, 2, 3,……….

3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni y = x, y = x^3, y = x^5, definite in [-π; π] e calcolo delle somme delle serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$**,** $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$**,** $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}$

(In quanto segue, tenere presente che cos(nπ)=(-1)^n e $sen(n\pi/2)$ *è uguale a 0 per n pari e alternativamente a 1 o a -1 per n dispari)*

- **y = x**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x**, definita in [-π;π], sono:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{2sen(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{\pi}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos(n\pi) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)(-1)^n$$

Sarà quindi per ogni $x \in]-\pi;\pi[$:

$$x = \frac{2}{\pi}\left(-\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}sen(nx)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen(nx)\right)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\pi\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}............\right)\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}}$$

- **y = x³**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x³**, definita in [-π;π], sono:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^3\cos(nx)}{n}+\frac{3x^2 sen(nx)}{n^2}+\frac{6x\cos(nx)}{n^3}+\right.$$
$$\left.-\frac{6sen(nx)}{n^4}\right]_0^{\pi} =$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3}{n}+\frac{6\pi}{n^3}\right)\cos(n\pi)\cdot=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3}{n}+\frac{6\pi}{n^3}\right)(-1)^n$$

Sarà quindi, per ogni $x\in$]-π; π [:

$$x^3 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{\pi^3}{n}+\frac{6\pi}{n^3}\right)(-1)^n sen(nx) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi^3}{n}-\frac{6\pi}{n^3}\right)(-1)^{n+1} sen(nx)$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\frac{\pi^3}{8}=\frac{2}{\pi}\pi^3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{\pi}6\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi^3}{8}=\frac{2}{\pi}\left(\pi^3\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+..........\right)+6\pi\left(-1+\frac{1}{27}-\frac{1}{125}+..........\right)\right)$$

$$\frac{\pi^3}{8}=\frac{2}{\pi}\pi^3\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}-\frac{2}{\pi}6\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{1}{12}\left(-\frac{\pi^3}{8}+2\pi^2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^3}{32}}$$

- **y = x⁵**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $\mathbf{y = x^5}$, definita in [-π; π], sono:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^5 sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^5\cos(nx)}{n} + \frac{5x^4 sen(nx)}{n^2} + \frac{20x^3\cos(nx)}{n^3} + \right.$$

$$\left. -\frac{60x^2 sen(nx)}{n^4} - \frac{120x\cos(nx)}{n^5} + -\frac{120 sen(nx)}{n^6}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5}\right)\cos(n\pi) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5}\right)(-1)^n$$

Sarà quindi per ogni $x \in]-\pi; \pi[$:

$$x^5 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(-\frac{\pi^5}{n} + \frac{20\pi^3}{n^3} - \frac{120\pi}{n^5}\right)\cdot sen(nx)$$

Per $x = \dfrac{\pi}{2}$ risulterà:

$$\frac{\pi^5}{32} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi^5}{2k-1} - \frac{20\pi^3}{(2k-1)^3} + \frac{120\pi}{(2k-1)^5}\right)$$

$$\frac{\pi^5}{32} = \frac{2}{\pi}\pi^5\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} - \frac{2}{\pi}20\pi^3\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} + \frac{2}{\pi}120\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} = \frac{1}{240}\left(\frac{\pi^5}{32} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{5\pi^5}{4}\right) = \frac{5}{1536}\pi^5}$$

4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica serie alternata $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$ con s numero naturale dispari.

Generalizzando le formule ottenute nel paragrafo precedente per il calcolo di $\frac{\pi^s}{2^s}$ con s = 1, 3, 5 al caso di s numero naturale dispari qualunque, si ottiene:

$$\frac{\pi^s}{2^s}=2\pi^{s-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}-2s(s-1)\pi^{s-3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}+2s(s-1)(s-2)(s-3)\cdot$$

$$\cdot\,\pi^{s-5}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5}+\ldots\ldots\ldots+(-1)^{\frac{s-3}{2}}2s(s-1)(s-2)\cdot\ldots\cdot2\pi^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{s-2}}+$$

$$+(-1)^{\frac{s-1}{2}}2s!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}$$

e quindi:

$$(-1)^{\frac{s-1}{2}}2s!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}=\frac{\pi^s}{2^s}+2\sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}(-1)^i\,\pi^{s-2i+1}\frac{s!}{(s-2i+2)!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{2i-1}}$$

da cui si ottiene la seguente formula ricorsiva:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^s}=(-1)^{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{\pi^s}{2^{s+1}\cdot s!}+\sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}(-1)^i\left(\frac{\pi^{s-2i+1}}{(s-2i+2)!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^{2i-1}}\right)\right)}$$

BIBLIOGRAFIA

1) L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna, 1748.

2) L. Euler, *De summis serierum reciprocarum*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, pp. 123-134.

3) J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

4) G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométrique*, Jour. Für Math., IV (1828).3