SULLE SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE

Carmen Carano[1]

Sunto: In questo lavoro, partendo dagli sviluppi in serie di Fourier delle funzioni y = x^s, con *s* numero intero pari, si ottiene una formula ricorsiva per il calcolo della somma della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Abstract: In this work, starting from the development in series of Fourier of the functions y = x^s, with *s* an even integer number, we obtain a recursive formula for the computation of the sum of the generalized harmonic series $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Parole chiave: funzione pari, funzione dispari, serie di funzioni, prolungamento periodico, serie trigonometrica, serie di Fourier, sviluppo in serie di Fourier.

1. Cenni sulla serie di Fourier

Data una funzione f(x) periodica, di periodo 2π e integrabile nell'intervallo $[-\pi;\pi]$, si definisce serie di Fourier di f(x) la serie trigonometrica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n sen(nx))$$

[1] Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" - Campobasso.
e-mail: c.carano@tiscali.it

DOI: 10.14672/67051236

in cui:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx$$

con n =1, 2, 3,……….
La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ converge e ha come somma proprio la $f(x)$ *(quindi tale funzione può essere rappresentata mediante la sua serie di Fourier),* se sono verificate le ipotesi del teorema di Dirichlet.
Il teorema di Dirichlet sulla sviluppabilità di una funzione in serie di Fourier afferma che se $f(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π, continua a tratti[2] nell'intervallo $[-\pi;\pi]$ e se tale intervallo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali $f(x)$ è monotona, allora la serie di Fourier di $f(x)$ è convergente per ogni $x \in$ R e la somma $\hat{f}(x)$ della serie nell'intervallo $[-\pi;\pi]$ è così definita: $\hat{f}(x) = f(x)$ nei punti $x \in]-\pi;\pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti sinistro e destro della $f(x)$ nei punti di discontinuità dell'intervallo $]-\pi;\pi[$, $\hat{f}(x)$ uguale alla semisomma dei limiti della $f(x)$ per x che tende a $-\pi$ da destra e per x che tende a π da sinistra per $x=-\pi$ e per $x=\pi$.

2. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni y = x^s (con s numero intero pari) definite in $[-\pi;\pi]$

[2] Una funzione si dice continua a tratti in un intervallo, se in esso è continua o ha al massimo un numero finito di punti di discontinuità di prima o terza specie.

I prolungamenti periodici delle funzioni $y = x^s$ (con s numero intero pari), definite nell'intervallo [- π ; π], verificano le condizioni del teorema di Dirichlet e ognuno di essi coincide, per ogni x, con la somma della sua serie di Fourier (non ci sono punti di discontinuità e $\hat{f}(x) = f(x)$ anche in $-\pi$ e in π, essendo $\hat{f}(\pm\pi) = f(\pm\pi) = \pi^s$).

I coefficienti di Fourier di tali funzioni, dato che x^s e $x^s \cdot \cos(nx)$ sono pari e $x^s \cdot sen(nx)$ è dispari, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s dx \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s \cos(nx)dx \qquad b_n = 0$$

con n =1, 2, 3,……….

3. Sviluppo in serie di Fourier dei prolungamenti periodici delle funzioni y = x^2, y = x^4, y = x^6, y = x^8, definite in [- π ; π] e calcolo delle somme delle serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}$

- **y = x^2**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x^2**, definita in [- π ; π], sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 sen(nx)}{n} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2} - \frac{2sen(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2}$$

Sarà quindi per ogni x:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cos(n\pi)}{n^2}\cdot\cos(nx)$$

Per $x = \pm\pi$ risulterà:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}\cdot(\cos(n\pi))^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

- **$y = x^4$**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di $\mathbf{y = x^4}$, definita in $[-\pi ; \pi]$, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\pi^4$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^4 sen(nx)}{n} + \frac{4x^3\cos(nx)}{n^2} - \frac{12x^2 sen(nx)}{n^3} + \right.$$

$$\left. - \frac{24x\cos(nx)}{n^4} + \frac{24 sen(nx)}{n^5}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{4\pi^3\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{24\pi\cos(n\pi)}{n^4}\right] = \frac{8\pi^2\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{48\cos(n\pi)}{n^4}$$

Sarà quindi, per ogni x:

$$x^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4}\right)\cos(n\pi)\cdot\cos(nx)\right)$$

Per $x = \pm\pi$ risulterà:

$$\pi^4 = \frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{8\pi^2}{n^2} - \frac{48}{n^4}\right)(\cos(n\pi))^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = = \frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{6} - 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

- **$y = x^6$**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **$y = x^6$**, definita in [$-\pi$; π], sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^6 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{7}\pi^6$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^6 \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^6 sen(nx)}{n} + \frac{6x^5\cos(nx)}{n^2} - \frac{30x^4 sen(nx)}{n^3} + \right.$$
$$\left. - \frac{120x^3\cos(nx)}{n^4} + \frac{360x^2 sen(nx)}{n^5} + \frac{720x\cos(nx)}{n^6} - \frac{720 sen(nx)}{n^7}\right]_0^{\pi} =$$
$$= \left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\right)\cdot\cos(n\pi)$$

Sarà quindi per ogni x:

$$x^6 = \frac{1}{7}\pi^6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\right)\cos(n\pi)\cdot\cos(nx)\right)$$

Per $x = \pm\pi$ sarà quindi:

$$\pi^6 = \frac{1}{7}\pi^6 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{12\pi^4}{n^2} - \frac{240\pi^2}{n^4} + \frac{1440}{n^6}\right)(\cos(n\pi))^2\right) =$$
$$= \frac{1}{7}\pi^6 + 12\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 240\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + 1440\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} =$$
$$= \frac{1}{7}\pi^6 + 12\pi^4\cdot\frac{\pi^2}{6} - 240\pi^2\cdot\frac{\pi^4}{90} + 1440\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}}$$

❑ **y = x⁸**

I coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x⁸**, definita in [-π ; π], sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^8 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{9}\pi^8$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^8 \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^8 sen(nx)}{n} + \frac{8x^7\cos(nx)}{n^2} - \frac{56x^6 sen(nx)}{n^3} + \right.$$

$$- \frac{336x^5\cos(nx)}{n^4} + \frac{1680x^4 sen(nx)}{n^5} + \frac{6720x^3\cos(nx)}{n^6} - \frac{20160x^2 sen(nx)}{n^7} +$$

$$\left. - \frac{40320x\cos(nx)}{n^8} + \frac{40320 sen(nx)}{n^9}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{8\pi^7}{n^2} - \frac{336\pi^5}{n^4} + \frac{6720\pi^3}{n^6} - \frac{40320\pi}{n^8}\right)\cdot\cos(n\pi) =$$

$$= \left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8}\right)\cdot\cos(n\pi)$$

Sarà quindi per ogni x:

$$x^8 = \frac{1}{9}\pi^8 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8}\right)\cos(n\pi)\cdot\cos(nx)\right)$$

Per $x = \pm\pi$ risulterà:

$$\pi^8 = \frac{1}{9}\pi^8 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{16\pi^6}{n^2} - \frac{672\pi^4}{n^4} + \frac{13440\pi^2}{n^6} - \frac{80640}{n^8}\right)(\cos(n\pi))^2\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\pi^8 + 16\pi^6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 672\pi^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + 13440\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} - 80640\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} =$$

$$= \frac{1}{9}\pi^8 + 16\pi^6\cdot\frac{\pi^2}{6} - 672\pi^4\cdot\frac{\pi^4}{90} + 13440\cdot\frac{\pi^6}{945} - 80640\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}$$

da cui si ricava facilmente che

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}}$$

4. Formula ricorsiva per il calcolo della somma della generica serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ con s intero positivo pari.

In generale, i coefficienti di Fourier del prolungamento periodico di **y = x^s^**, definita in [- π ; π], con *s* intero positivo pari, sono:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{s+1}\pi^s$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^s \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^s sen(nx)}{n} + \frac{sx^{s-1}\cos(nx)}{n^2} - \frac{s(s-1)x^{s-2}sen(nx)}{n^3}\right.$$

$$\left. - \frac{s(s-1)(s-2)x^{s-3}\cos(nx)}{n^4} + ... + (-1)^{\frac{s}{2}-1}\frac{s!\,x\cos(nx)}{n^s} + (-1)^{\frac{s}{2}}\frac{s!\,sen(nx)}{n^{s+1}}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{s\pi^{s-1}}{n^2} - \frac{s(s-1)(s-2)\pi^{s-3}}{n^4} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5}}{n^6} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots\ldots\ldots \frac{(-1)^{\frac{s}{2}-1}\cdot s!\pi}{n^s}\right]\cdot\cos(n\pi)$$

Sarà quindi per ogni x:

$$x^s = \frac{\pi^s}{s+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{s\pi^{s-1}}{n^2} - \frac{s(s-1)(s-2)\pi^{s-3}}{n^4} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5}}{n^6} - \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^{\frac{s}{2}-1}s!\pi}{n^s}\right]\cdot\cos(n\pi)\cos(nx)$$

Per $x = \pm\pi$:

$$\pi^s = \frac{\pi^s}{s+1} + \frac{2}{\pi}\left(s\pi^{s-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - s(s-1)(s-2)\pi^{s-3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \right.$$

$$\left. + s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{\frac{s}{2}-1}s!\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right)$$

$$\pi^s = \frac{\pi^s}{s+1} + 2s\pi^{s-2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2s(s-1)(s-2)\pi^{s-4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} +$$

$$+2\,s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2(-1)^{\frac{s}{2}-1}s!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

Risulterà quindi:

$$2(-1)^{\frac{s}{2}-1}s!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\pi^s-\frac{\pi^s}{s+1}-2s\pi^{s-2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+2s(s-1)(s-2)\pi^{s-4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}+$$
$$-2s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)\pi^{s-6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}+...2s(s-1)(s-2)..(s-(s-4))\pi^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{s-2}}$$

da cui:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=(-1)^{\frac{s}{2}-1}\left(\frac{\pi^s s}{2(s+1)!}+\sum_{i=1}^{\frac{s}{2}-1}(-1)^i\left(\frac{\pi^{s-2i}}{(s-2i+1)!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2i}}\right)\right)}$$

<u>**BIBLIOGRAFIA**</u>

1) L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna, 1748.

2) L. Euler, *Opera omnia*, v. XIV.

3) J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

4) G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométrique*, Jour. Für Math., IV (1828).