UNA SPIRALE LOGARITMICA AUREA

Carmen Carano[1]

Sunto: In questo lavoro si dimostra una semplice proprietà dei triangoli rettangoli e con essa si costruisce un esempio di spirale logaritmica aurea. La proprietà e l'esempio sono inseriti in un breve exursus storico sulle *spirali archimedee* e *logaritmiche*.

Abstract: In this job we prove an easy property of right-angled triangles and by it we construct an example of golden logarithmic spiral. The property and the example are introduced in a brief historical digression on the archimedean and logarithmic spirals.

Parole chiave: Coordinate polari, progressioni aritmetiche e geometriche, sezione aurea.

[1] Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" – Campobasso, e-mail: c.carano@tiscalinet.it

DOI: 10.14672/67051237

INTRODUZIONE

La spirale è una curva piana che si avvolge in infiniti giri intorno ad un punto e la cui curvatura diminuisce man mano che ci si allontana da esso.

È una delle figure geometriche più diffuse in natura: si trova per esempio nel modo in cui crescono i petali e le foglie di alcuni fiori, nella forma delle corna, delle zanne e degli artigli di alcuni animali, nel moto dei cicloni, nella molecola del DNA, nella forma di alcune conchiglie come quella del Nautilus e in quella di alcune galassie.

Dal punto di vista matematico, la spirale si definisce come una curva piana la cui equazione polare è della forma $\rho = f(\theta)$ dove f è una funzione monotona in un intervallo non limitato (il polo è il punto intorno al quale la curva si avvolge).

In particolare analizzeremo un esempio di spirale logaritmica aurea, ma prima ci sembra opportuno parlare brevemente della spirale di Archimede e della spirale logaritmica.

1. LA SPIRALE DI ARCHIMEDE

Tale curva, scoperta circa 2200 anni fa dallo scienziato siracusano e da lui descritta nell'opera *De lineis spiralibus*[2], ha equazione polare $\rho = k\theta$, cioè per un punto di tale curva la distanza dal polo è proporzionale all'angolo descritto dal raggio vettore.

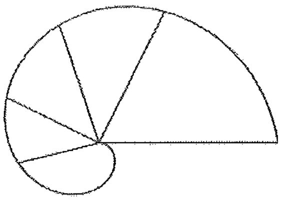


Fig. 1

Si tratta della traiettoria di un punto mobile su una semiretta: mentre la semiretta ruota intorno alla sua origine O con velocità angolare costante, il punto, partendo da O, si muove di moto uniforme (fig. 1).

[2] Nell'opera sono sviluppati argomenti geometrici e cinematica, che spesso si fondono tra loro. Sembra che Archimede sia stato il primo ad aver trovato, con considerazioni cinematiche simili al calcolo differenziale, la tangente ad una curva diversa dalla circonferenza. Nell'opera Archimede tratta anche il moto uniforme e riguardo ad esso dimostra due proposizioni: *gli spazi percorsi da un punto che si muove di moto uniforme stanno fra loro come i tempi di percorrenza*; *gli spazi percorsi in tempi uguali da due punti che si muovono di moto uniforme sono fra loro proporzionali.*

Servendosi della spirale, Archimede ottenne risultati molto interessanti.

Uno di questi consiste nella possibilità di ridurre il problema della rettificazione di una circonferenza a quello di tracciare la tangente alla spirale in un suo punto.

Infatti, supposto che la semiretta ruotante abbia compiuto un giro completo, il punto mobile su di essa, inizialmente in O, coinciderà con un determinato punto della spirale. Si tracci la tangente alla spirale in questo punto e per il punto O si tracci la perpendicolare alla semiretta nella nuova posizione. La tangente e la perpendicolare s'incontreranno in un punto. Il segmento di perpendicolare determinato da O e questo punto è la circonferenza rettificata del *primo cerchio*, cioè del cerchio che ha come raggio il segmento compreso fra O e il punto di tangenza (fig. 2).

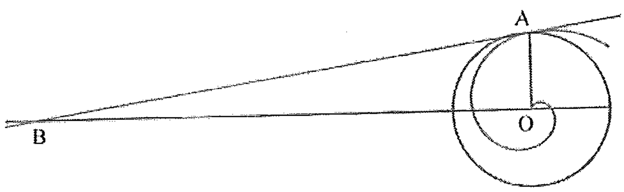


Fig. 2

Un'importante proprietà di questo tipo di curva consiste nel poter effettuare con essa la trisezione di un angolo assegnato.

Un altro risultato stabilito da Archimede è che la superficie compresa tra la prima rivoluzione della spirale e la semiretta ruotante è la terza parte del *primo cerchio*.

2. LA SPIRALE LOGARITMICA

Fu scoperta nel 1638 da Cartesio (1596-1690) e successivamente trattata da Evangelista Torricelli (1608–1647) nella sua opera *De infinitis spiralibus*[3] che risale al 1645. Circa cinquant'anni dopo la scoperta di tale curva, Jacob Bernoulli (1654-1705), studiandone le pro-

---

[3] È una delle opere più significative di Torricelli, in cui viene risolto, per la prima volta nella storia della matematica, il problema della *rettificazione* di un arco di curva.

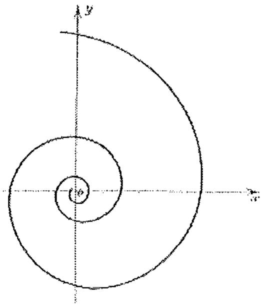


Fig. 3

prietà, ne rimase talmente affascinato da chiedere che sulla sua tomba ne fosse scolpita una con la scritta *eadem mutata resurgo*[4]. Lo scalpellino riuscì a riprodurre, invece, solo una spirale di Archimede e sulla tomba la scritta non compare.

La *spirale logaritmica* o *equiangolare* (fig. 3) ha equazione polare $\rho = a\,e^{k\theta}$, dove a e k sono numeri reali positivi, θ è un qualsiasi numero reale e risulta

$$\lim_{\theta\to-\infty} \rho = 0$$

(il polo è quindi per tale curva un punto asintotico; se cercassimo di osservarlo con una lente d'ingrandimento via via più potente, vedremmo riprodotta identica sempre la stessa curva).

Il nome di *spirale logaritmica* deriva dal fatto che la sua equazione può essere scritta nella forma

$$\ln \rho = k\,\theta + \text{cost.}$$

Il nome *spirale equiangolare*, con il quale a volte viene chiamata tale curva, dipende dal fatto che una sua proprietà caratteristica è che un qualsiasi raggio vettore, negli infiniti punti in cui incontra la spirale, forma con le tangenti in tali punti angoli della stessa ampiezza. Indicata con ψ l'ampiezza di tali angoli, risulta $k = \cot\psi$. Infatti, considerato un generico punto $P[\rho,\theta]$ della curva di equazione $\rho = a\,e^{k\theta}$, siano r il raggio vettore passante per P e t la tangente alla curva in tale punto (fig. 4).

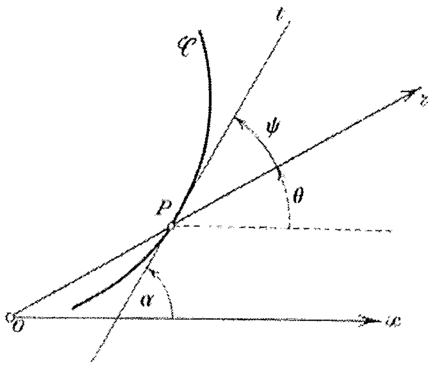


Fig. 4

[4] *"sebbene mutata, rinasco identica".*

Le coordinate cartesiane di P sono (ρ cosθ, ρ senθ) quindi il coefficiente angolare di t è

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{\text{tag}\theta + \frac{\rho}{\rho'_\theta}}{1 - \frac{\rho}{\rho'_\theta}\text{tag}\theta}.$$

Da cui si ricava

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{tag}\theta + \frac{\rho}{\rho'_\theta}}{1 - \frac{\rho}{\rho'_\theta}\text{tag}\theta},$$

che può essere scritta nella forma

$$\frac{\text{tag}\alpha - \text{tag}\,\theta}{1 + \text{tag}\,\alpha \cdot \text{tag}\,\theta} = \frac{\rho}{\rho'_\theta}.$$

Essendo $\psi = \alpha - \theta$, si ha

$$\text{tag}\,\psi = \frac{\rho}{\rho'_\theta}\ , \text{ da cui } \cot\text{g}\,\psi = \frac{\rho'_\theta}{\rho} = \frac{a\,k\,e^{k\theta}}{a\,e^{k\theta}} = k\,.$$

Questa proprietà è caratteristica per la spirale logaritmica; infatti, da $\frac{\rho'_\theta}{\rho} = k$ segue $\frac{d\rho}{\rho} = k\,d\theta$.

Integrando ambo i membri di quest'ultima uguaglianza, si ha $\int_a^\rho \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^\theta k\,d\theta$ da cui si ottiene $\ln\frac{\rho}{a} = k\,\theta$ e, quindi, $\rho = a\,e^{k\theta}$.

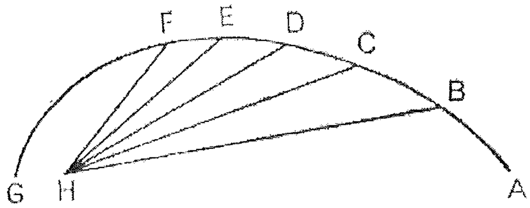
Nell'opera *De infinitis spiralibus* Torricelli dà una definizione di spirale logaritmica (che l'autore chiama *spirale geometrica*) che si dimostra essere equivalente a quella da noi precedentemente riportata[5] e che risulta molto interessante per l'esempio che vogliamo trattare.

> Consideriamo una certa linea [v. figura] ABCDEFG, tale che, se con vertice in H si prendono quanti si vogliono angoli consecutivi tra loro uguali, per esempio:
>
> $$B\hat{H}C = C\hat{H}D = D\hat{H}E = \ldots$$
>
> tali angoli siano limitati da segmenti in proporzione continua, si abbia cioè:

[5] Cfr. [1], pagg. 188-190, nota 13.

$$HB : HC = HC : HD = HD : HE = \ldots$$

Tale linea sarà da noi chiamata "spirale geometrica" della quale diremo H il centro e i segmenti HB, HC, HD, HE, ... i raggi.



Chiamiamo geometrica la spirale ora definita per esprimere con il nome stesso quale sia la differenza tra le spirali d'Archimede, che veramente possono dirsi aritmetiche, e le nostre.
Le spirali archimedee infatti hanno questo di particolare, che il punto mobile sopra una retta, animata da moto rotatorio (uniforme) su di un piano, in tempi uguali percorre spazi uguali. Invece nelle nostre spirali il punto che si muove sopra la retta animata da moto rotatorio uniforme, possiede la proprietà caratteristica di percorrere in tempi uguali spazi in progressione geometrica. La proposizione enunciata si dimostra con facile ragionamento in base alla definizione posta: infatti (v. figura) dato che velocità della retta ruotante nel piano è sempre uguale a se stessa, e gli angoli $B\hat{H}C, C\hat{H}D, D\hat{H}E$ sono uguali tra loro, è manifesto che la nostra linea rotante, per esempio HB, descrive in tempi uguali uno qualsiasi dei predetti angoli uguali. Ma poiché i segmenti stessi che limitano quegli angoli uguali sono in proporzione continua, anche le loro differenze saranno in proporzione continua: ma le differenze non sono altro che gli spazi percorsi dal punto mobile che si muove sopra la retta rotante nel piano. E dunque chiaro che il punto mobile il quale presso Archimede percorre spazi uguali in tempi uguali, nelle nostre spirali non percorre spazi uguali ma spazi in progressione geometrica; quindi piacque chiamare geometriche queste spirali.

Per poter ottenere questa curva, non si può partire dal polo (come per la spirale di Archimede) essendo questo per tale curva un punto asintotico. È possibile immaginare la sua generazione partendo da un suo generico punto, per esempio da $P_0(\rho_0, \theta_0)$ con $\theta_0 = 0$. Immaginiamo due semirette, di origine nel polo e inizialmente nella posizione OP_0, che cominciano a ruotare in verso opposto con la stessa velocità angolare costante, mentre su ognuna di esse, partendo da P_0, un punto si sposta su una semiretta avvicinandosi e sull'altra allontanandosi dal polo, con la stessa velocità, percorrendo in tempi uguali spazi in progressione geometrica.

3. DESCRIZIONE PER PUNTI DI UNA SPIRALE LOGARITMICA

Dimostreremo qui di seguito come ogni successione di punti di un piano i cui moduli sono in progressione geometrica di ragione q e i cui argomenti sono in progressione aritmetica di ragione p, appartiene alla spirale logaritmica definita da

$$k = \frac{\ln q}{p}.$$

Assegnati i numeri reali a, q, p, con a e q positivi e $q \neq 1$, consideriamo le due successioni $\{\rho_i\}$, $\{\theta_i\}$ di numeri reali così definite:

$$\begin{cases} \rho_0 = a \\ \rho_i = \rho_{i-1}\, q \end{cases} ; \quad \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \theta_i = \theta_{i-1} + p \end{cases}$$

La successione di punti $\{P_i(\rho_i, \theta_i)\}$ appartiene alla spirale logaritmica di equazione polare

$$\rho = a\, e^{\frac{\ln q}{p}\theta}.$$

Per la dimostrazione, applicheremo il principio d'induzione separatamente alle due successioni di primo elemento $P_0(a, 0)$ (che evidentemente appartiene alla spirale), la prima con elementi con indici interi crescenti, la seconda con indici interi decrescenti.

- Prima successione: basta far vedere che, se P_{i-1} appartiene alla spirale, anche P_i vi appartiene:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q = a \cdot e^{\frac{\ln q}{p}\vartheta_{i-1}} q \cdot = a \cdot q^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}+1} = a \cdot q^{\frac{\vartheta_{i-1}+p}{p}} = a \cdot q^{\frac{\vartheta_i}{p}} = a \cdot e^{\frac{\ln q}{p}\vartheta_i} \qquad c.\ v.\ d.$$

- Seconda successione: basta far vedere che, se P_i appartiene alla spirale, anche P_{i-1} vi appartiene:

$$\rho_{i-1} = \rho_i \cdot q = \frac{a \cdot e^{\frac{\ln q}{p}\vartheta_i}}{q} = a \cdot q^{\frac{\vartheta_i}{p}-1} = a \cdot q^{\frac{\vartheta_i - p}{p}} = a \cdot q^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}} = a \cdot e^{\frac{\ln q}{p}\vartheta_{i-1}} \qquad c.\ v.\ d.$$

4. UN ESEMPIO DI SPIRALE AUREA

Ritornando alla definizione di Torricelli, diremo *aurea* ogni spirale logaritmica in cui il rapporto costante tra raggi consecutivi è pari al *numero aureo*

Nel paragrafo 3 abbiamo chiamato successioni elenchi ordinati di elementi con indici in Z: non si tratta di successioni (secondo la definizione corretta di successione), ma di elenchi ordinati di elementi che possiamo pensare come unione di due successioni aventi lo stesso primo elemento, una con elementi con indici crescenti (a_0, a_1, a_2, a_3 ...), l'altra con elementi con indici decrescenti (a_0, a_{-1}, a_{-2}, a_{-3} ..); tali elenchi rappresentano modelli matematici che ben si prestano allo studio delle spirali logaritmiche.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ .$$

Teniamo anche presente che la *sezione aurea* di un segmento si *autogenera.*[6]

Il seguente teorema permette di individuare una successione di punti appartenenti ad una spirale logaritmica aurea.

TEOREMA: *Se in un triangolo rettangolo un cateto è la sezione aurea dell'ipotenusa, tale cateto proietta sull'ipotenusa la sua sezione aurea.*

Dimostrazione: Consideriamo il triangolo rettangolo OP_1P_0 (fig. 5) con $\hat{P}_1 = \frac{\pi}{2}$ e con OP_1 uguale alla parte aurea di OP_0.

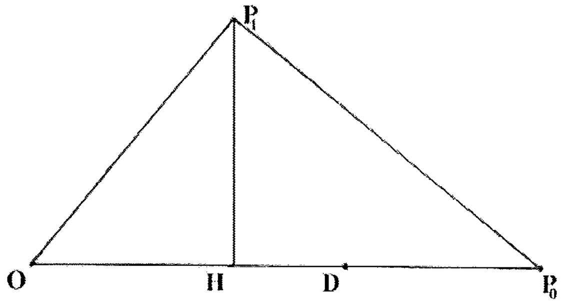


Fig. 5

Costruito su OP_0 il segmento OD uguale a OP_1, per ipotesi si ha:

$$\overline{OP_0} \cdot \overline{DP_0} = \overline{OP_1}^2$$

ma, per il primo teorema di Euclide, risulta anche

$$\overline{OP_0} \cdot \overline{OH} = \overline{OP_1}^2$$

quindi $\overline{DP_0} = \overline{OH}$. Essendo DP_0 la sezione aurea di OD e quindi di OP_1[7], l'asserto è dimostrato.

[6] Se b è la parte aurea di a, allora a-b (parte rimanente), è la parte aurea di b. Infatti: a : b = b : (a - b) ⇔ (a - b) : b = (2b - a) : (a - b) ⇔ b : (a - b) = (a - b) : (b - (a - b)).

[7] Cfr. nota 6.

Questo teorema permette di costruire con riga e compasso la successione di punti $\{P_i\}_{i\in Z}$, per i quali risulta:

$$\frac{\overline{OP_{i+1}}}{\overline{OP_i}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi \;;$$

$$P_i\hat{O}P_{i+1} = \operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \arccos \varphi^{-1} = 51°\ 49'\ 38''$$

Per quanto dimostrato precedentemente, essi appartengono alla spirale logaritmica di equazione polare

$$\rho = \overline{OP_0}\ e^{\frac{\ln\varphi}{\arccos\varphi^{-1}}\theta}$$

Posto $\overline{OP_0} = 1$, la formula precedente può essere scritta nella forma

$$\rho = \varphi^{\frac{\theta}{\arccos\varphi^{-1}}}$$

e, per ogni punto P_i, risulta:

$$\rho(P_i) = \varphi^i \quad e \quad \theta(P_i) = i \arccos \varphi^{-1}$$

Di seguito riportiamo la costruzione con riga e compasso di alcuni dei punti P_i (fig. 6). Nella figura il segmento OQ è la sezione aurea di OP_3.

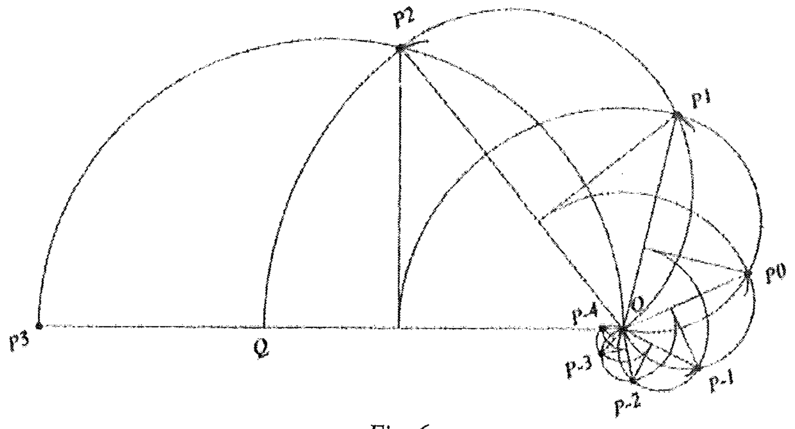


Fig. 6

Il grafico della spirale aurea considerata è quello di fig. 7.

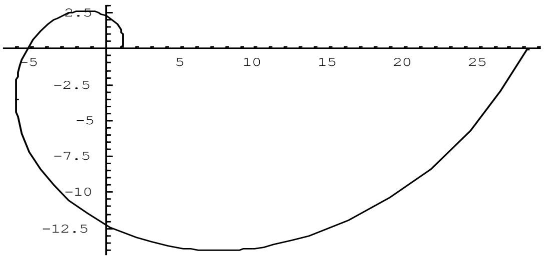


fig. 7

L'incremento della distanza da O quando si passa da P_i a P_{i+1} è, per ogni $i \in Z$, $\Delta d_i = \overline{OP_{i+1}} - \overline{OP_i} = \overline{OP_i}(\varphi - 1) = \overline{OP_i}\varphi^{-1}$ (in particolare è $\Delta d_1 = \overline{OP_0}$); gli elementi della successione $\{\Delta d_i\}$ di tali incrementi sono pertanto in progressione geometrica di ragione $\Delta d_{i+1} / \Delta di = \varphi$.

Se pensiamo alla generazione della spirale considerata immaginando, come descritto alla fine del paragrafo 2, due semirette, di origine nel polo O e inizialmente nella posizione OP_0, che cominciano a ruotare…., le due successioni $\{\Delta d_i\}_{i \geq 0}$ e $\{\Delta d_i\}_{i<0}$ degli spazi percorsi dal punto mobile su ognuna delle due semirette quando esse ruotano, in senso opposto, intorno alla loro origine di un angolo di ampiezza α = arcsec φ = arccos φ^{-1}, sono progressioni geometriche di ragione rispettivamente $\Delta d_{i+1} / \Delta di = \varphi$ e $\Delta d_{i-1} / \Delta di = \varphi^{-1}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Feltrinelli, Milano, 1962.

[2] G. LORIA, *Storia delle Matematiche*, Hoepli, Milano, 1950.

[3] C. B. BOYER, *Storia della matematica*, Mondatori, Milano, 1990.

[4] U. MORIN, *Lezioni di Geometria*, v. II, Cedam, Padova, 1966.