La successione di Fibonacci, il numero aureo, la spirale logaritmica aurea

Carmen Carano[1]

Sunto: In questo lavoro si definisce una successione logaritmica (e in particolare aurea) di punti nel piano, si introduce una generalizzazione della successione di Fibonacci e si vede come questa è in relazione con la successione $\{\varphi^i\}$, dove φ è il numero aureo e i varia in Z; infine si dimostra come si può costruire una successione logaritmica di punti, e quindi una spirale logaritmica, che in un caso particolare, risulta aurea.

Abstract: In this job we define a logarithmic succession (and in particular a golden succession) of points in the plane, then we introduce a generalization of Fibonacci's succession and we indicate how it is connected with the succession $\{\varphi^i\}$, where φ is the golden number and *i* is a number of Z; at last we show how it is possible to make a logarithmic succession of points and, from here, a logarithmic spiral that, in a particular case, is a golden spiral.

Parole chiave: Coordinate polari, progressioni aritmetiche e geometriche, sezione aurea, spirale logaritmica, spirale aurea.

---

[1] Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" - Campobasso. E-mail: c.carano@tiscalinet.it

DOI: 10.14672/67051234

Di seguito chiameremo successioni anche elenchi ordinati di elementi con indici in Z; si tratta di elenchi ordinati che si possono pensare come unioni di due successioni con lo stesso primo elemento: una con indici crescenti (a_0, a_1, a_2, a_3,..) e una con indici decrescenti (a_0, a_{-1}, a_{-2},a_{-3}…).

DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE LOGARITMICA DI PUNTI

In un riferimento polare i punti di una successione $\{P_i\}$, con anomalie in progressione aritmetica e con moduli in progressione geometrica, appartengono ad una spirale logaritmica. In base a tale proprietà, definiremo logaritmica una successione di punti $\{P_i\}$ per i quali in un riferimento polare di polo O si verificano le seguenti uguaglianze:

$$P_i\hat{O}P_{i+1} = \alpha \qquad , \qquad \frac{\overline{OP}_{i+1}}{\overline{OP}_i} = \lambda \qquad \forall\ i \in Z$$

(i moduli di tali punti costituiscono quindi una successione del tipo $\{c\lambda^i\}$). I punti P_i individuano una spirale logaritmica di equazione polare:

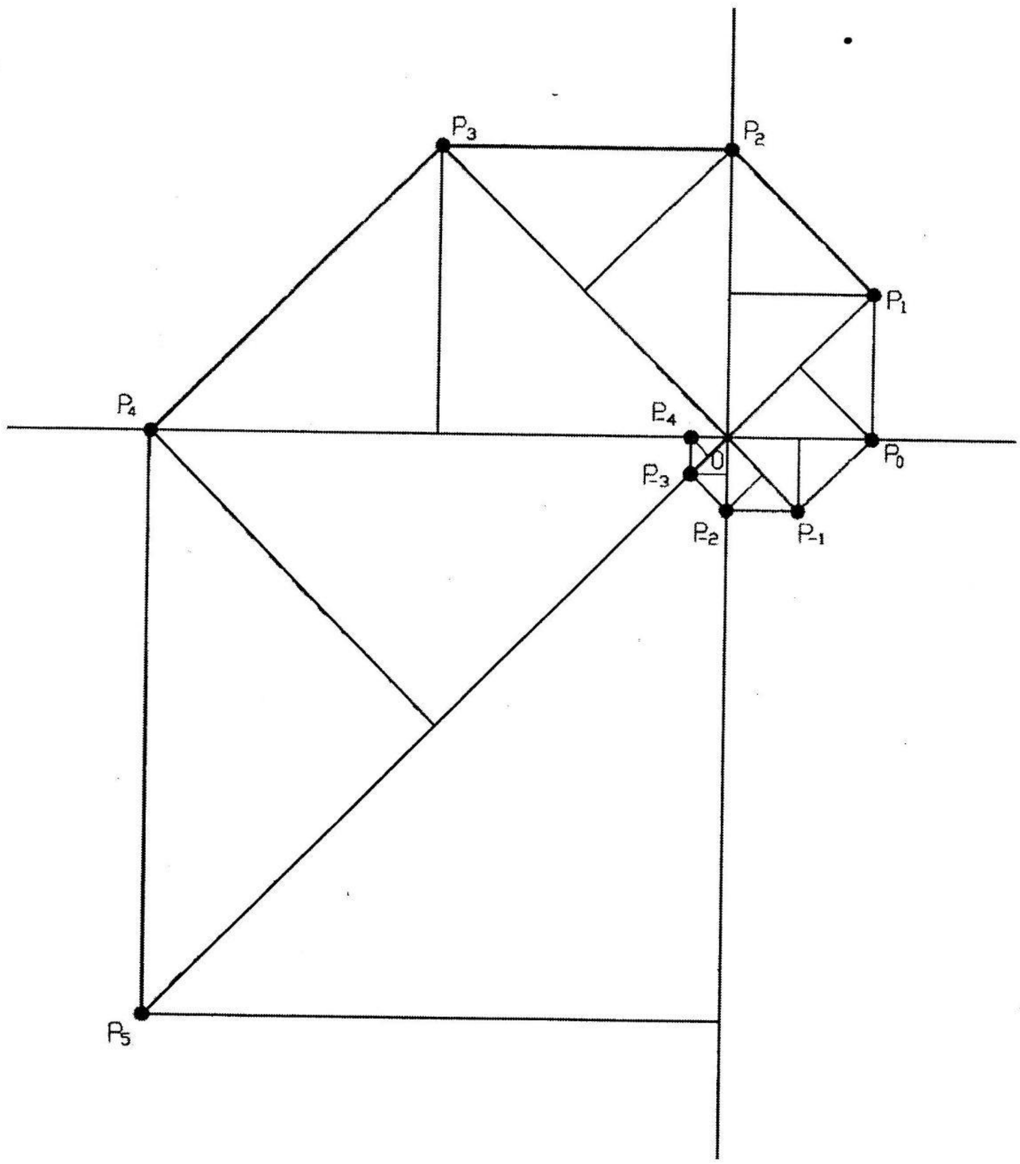
$$\rho = ke^{\frac{\ln\lambda}{\alpha}\vartheta}$$

e quindi:

$$\rho = k\lambda^{\frac{\vartheta}{\alpha}}$$

Per esempio, se si considera una serie di quadrati aventi un vertice in O e tali che la diagonale di ognuno di essi avente un estremo in O sia il lato del quadrato successivo (spostandosi in senso orario o antiorario), la successione degli estremi di tali diagonali, diversi da O, è una successione logaritmica di punti per i quali

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \lambda = \sqrt{2}$$



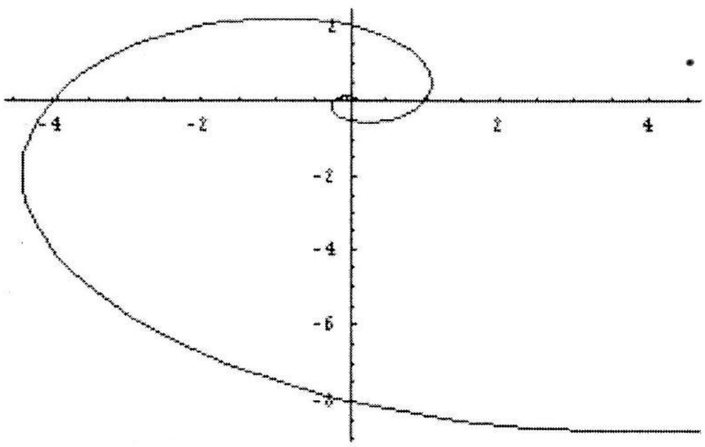
che individuano la spirale logaritmica di equazione

$$\rho = k\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{4\vartheta}{\pi}}$$

e quindi

$$\rho = k \cdot 2^{\frac{2}{\pi}\vartheta}$$

Di seguito riportiamo il grafico di tale spirale nel caso che sia $k = 1$ ($\rho(P_0)=1$).



In particolare, se $\lambda = \varphi$ (dove φ è il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea), definiremo la successione $\{P_i\}$ una successione logaritmica aurea (i moduli di tali punti costituiscono una successione del tipo $\{c\varphi^i\}$). In tal caso la spirale individuata dai punti P_i è una spirale aurea che dipende dai valori di k e di α, di equazione:

$$\rho = k\varphi^{\frac{\vartheta}{\alpha}}$$

LA SUCCESSIONE $\{\varphi^i\}$

Il rapporto tra un segmento e la sua parte aurea è pari al numero aureo

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

quindi φ^{i-1} è la lunghezza della parte aurea del segmento di lunghezza φ^i per ogni valore di i appartenente a Z. Se il segmento AB ha lunghezza φ^i, la sua parte aurea AC ha lunghezza φ^{i-1} e la parte rimanente CB (che è la parte aurea di AC) ha lunghezza φ^{i-2}. Sarà quindi, per ogni i appartenente a Z,

$$\varphi^i = \varphi^{i-1} + \varphi^{i-2} \qquad (1)$$

$$(\varphi^{i-1})^2 = \varphi^i \varphi^{i-2} \qquad (2)$$

GENERALIZZAZIONE DELLA SUCCESSIONE DI FIBONACCI E RELAZIONE TRA QUESTA E LA $\{\varphi^i\}$

La successione di Fibonacci $\{f_n\}$ (con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per $n > 1$) può essere generalizzata in Z in $\{f_i\}$ (con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ per ogni i appartenente a Z). Sarà quindi:

$\{f_i\} = \{......-21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ......\}$

Per tale successione risulta:

$$f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \tag{3}$$

e

$$(f_{i-1})^2 = f_i f_{i-2} \left\langle \begin{array}{ll} +1 & \text{se i è pari} \\ -1 & \text{se i è dispari} \end{array} \right. \tag{4}$$

Queste due relazioni che caratterizzano tale successione differiscono da quelle che caratterizzano la successione $\{\varphi^i\}$ a causa del termine +1 o –1 nella seconda; tale termine tende a diventare sempre più ininfluente al crescere di i (cioè al crescere di i, f_{i-1} si avvicina sempre più alla parte aurea di f_i).

Binet ha dimostrato, per ogni n appartenente a N, la seguente relazione tra la $\{f_n\}$ e la $\{\varphi^n\}$:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Tale relazione continua a essere valida anche tra le successioni $\{f_i\}$ e $\{\varphi^i\}$, per ogni i appartenente a Z:

$$f_i = \frac{\varphi^i - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^i}{\sqrt{5}} \tag{5}$$

È facile, partendo dalla (1), determinare la relazione inversa:

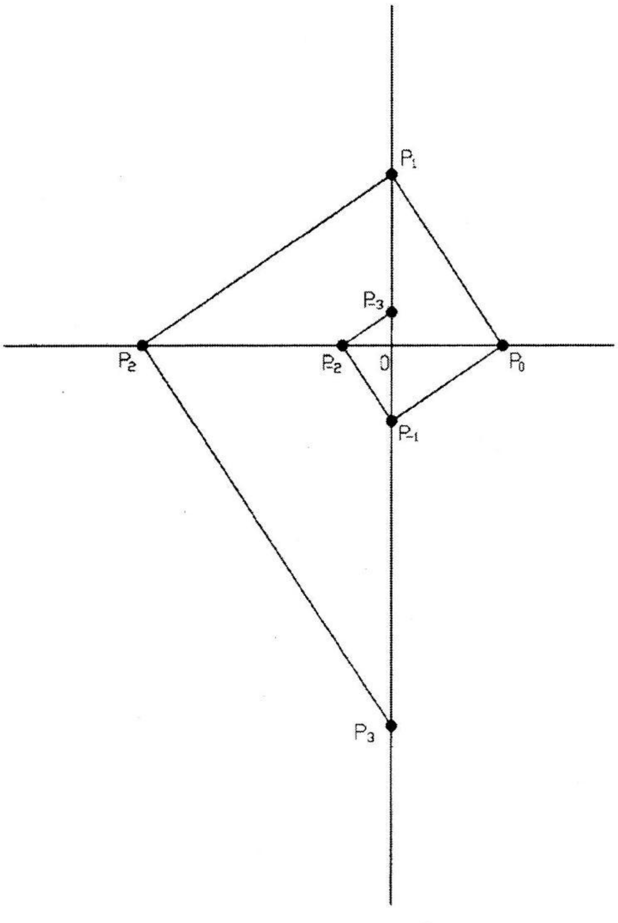
$$\varphi^i = f_i \varphi + f_{i-1} \tag{6}$$

valida, anch'essa per ogni i appartenente a Z.

COSTRUZIONE DI UNA SUCCESSIONE LOGARITMICA DI PUNTI

È possibile ottenere molto facilmente una successione logaritmica di punti nel piano nel seguente modo.

A partire da un punto P_0 qualsiasi sul semiasse positivo delle ascisse (per esempio $P_0(1, 0)$), si tracci un segmento (che non giaccia sull'asse x e che non sia ad esso perpendicolare) il cui secondo estremo P_1 sia sul semiasse positivo dell'asse y con ordinata diversa da 1. A partire dal segmento P_0P_1 si costruiscano, per i appartenente a Z, i segmenti P_iP_{i+1} perpendicolari tra loro e con gli estremi alternativamente sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate.



La $\{P_i\}$ è una successione logaritmica di punti per la quale

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \lambda = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_0}}$$

Infatti, per il secondo teorema di Euclide, è

$$\overline{OP_i}^2 = \overline{OP}_{i-1} \cdot \overline{OP}_{i+1}$$

Sarà quindi:

$$\overline{OP}_{i+1} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OP}_{i-1}} \cdot \overline{OP_i}$$

Essendo i triangoli OP_iP_{i+1} simili, il rapporto

$$\frac{\overline{OP}_i}{\overline{OP}_{i-1}} = \lambda$$

con λ costante. Quindi la $\{P_i\}$ individua una spirale logaritmica di equazione polare

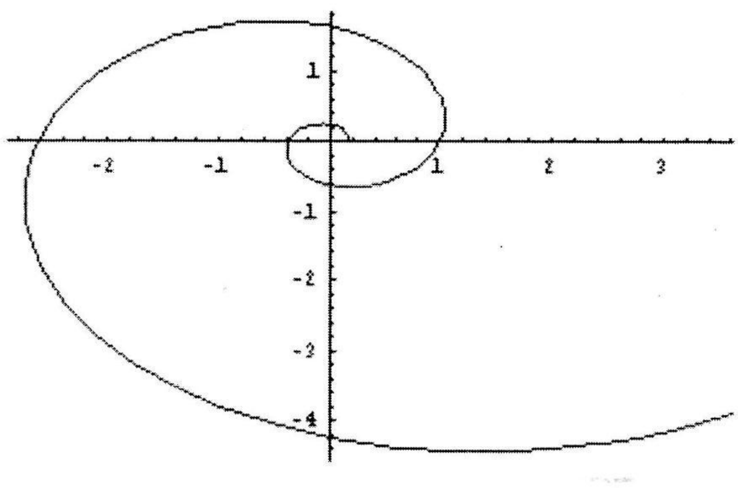
$$\rho = \lambda^{\frac{2}{\pi}\vartheta}$$

(Se $\lambda = 2$, tale spirale coincide con quella dell'esempio di pag. 32).

Se $\lambda = \varphi$ si ottiene una successione aurea di punti che individua la spirale aurea di equazione polare:

$$\rho = \varphi^{\frac{2}{\pi}\vartheta}$$

(in tal caso $\rho(P_i) = \rho(P_{i-1}) + \rho(P_{i-2}) = \varphi^i$ dove φ^i può essere calcolato, per ogni valore di i, dalla (6)).



BIBLIOGRAFIA

[1] G. LORIA, *Storia delle Matematiche,* Hoepli, Milano, 1962.

[2] L. CAMPEDELLI, *Lezioni di geometria,* Cedam, Padova, 1966.

[3] E. TORRICELLI, *De infinitis spiralibus* (trad. E. Carruccio), "Quaderni di Storia e critica della Scienza", n° 3, 1955.