

SPIRALI LOGARITMICHE TRIDIMENSIONALI

Carmen Carano¹

Sunto: In questo lavoro si definiscono due tipi di curve nello spazio (spirali logaritmiche tridimensionali), ottenuti dall'intersezione di due coppie di superfici di cui si forniscono le equazioni in coordinate cilindriche. Si dimostra poi che una successione $\{P_i\}$ di punti dello spazio aventi coordinate cilindriche che soddisfano opportune condizioni, individua una spirale logaritmica del primo o del secondo tipo.

Abstract: In this work two different types of curves in space are defined (three-dimensional logarithmic spirals). They are obtained by intersections of two pairs of surfaces whose equations in cylindrical coordinates are provided. Then we demonstrate that a succession $\{P_i\}$ of points of the space having cylindrical coordinates that satisfy appropriate conditions, characterizes a logarithmic spiral of first or second type.

Parole chiave: Coordinate cilindriche, superfici spirali logaritmiche cilindriche, progressioni aritmetiche e geometriche, numero aureo, curve spirali logaritmiche, curve spirali logaritmiche auree.

¹ Istituto Tecnico Industriale "G. Marconi" - Campobasso.
e-mail: c.carano@tiscali.it

DOI: 10.14672/67051235

Introduzione alle spirali logaritmiche tridimensionali

Passando dalla situazione bidimensionale a quella tridimensionale, il polo, punto intorno al quale la spirale logaritmica piana si avvolge in infiniti giri (avvicinandosi indefinitamente ad esso da una parte e allontanandosi sempre più da esso dall'altra con curvatura via via decrescente), diventa l'asse polare, retta intorno alla quale la curva si avvolge ancora in infiniti giri (continuando ad avvicinarsi indefinitamente ad esso da una parte e allontanandosi sempre più da esso dall'altra con curvatura via via decrescente).

Nello spazio, a differenza di quanto avviene nel piano, credo che si possano distinguere due tipi di spirali logaritmiche: la proiezione ortogonale di esse su un generico piano perpendicolare all'asse è una spirale logaritmica piana; la differenza tra i due tipi di spirale consiste nel fatto che nel primo caso esse si avvicinano indefinitamente da una parte all'asse tendendo a un suo punto proprio, nel secondo si avvicinano indefinitamente ad esso da una parte tendendo a uno dei suoi due punti impropri.

Proprietà delle spirali logaritmiche nello spazio

Per la spirale logaritmica piana, detto O il suo polo e considerati su di essa i punti A, B, C, D, E, F, \dots tali che $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}E = E\hat{O}F = \dots$, risulta $OA:OB=OB:OC=OC:OD=OD:OE=OE:OF=\dots$; questa è una proprietà che caratterizza (e quindi definisce) le spirali logaritmiche piane, quindi è vero anche che se si considerano dei punti A, B, C, D, E, F, \dots che verificano le condizioni precedenti (cioè per i quali i moduli sono in progressione geometrica di ragione che indicheremo con q e gli argomenti in progressione aritmetica di ragione che indicheremo con p), si può affermare che essi appartengono a una spirale logaritmica piana e si dimostra che tale spirale ha equazione $\rho = ae^{k\theta}$ con $k=\ln q/p$ (E. TORRICELLI, *De infinitis spiralibus*).

Per la spirale logaritmica tridimensionale, considerati su di essa i punti A, B, C, D, E, F, \dots tali che i diedri delimitati dai semipiani uscenti dall'asse polare e contenenti rispettivamente il punto

A e il punto B, il punto B e il punto C, il punto C e il punto D, il punto D e il punto E, il punto E e il punto F.....siano di ampiezza uguale, le distanze dei punti considerati dall'asse polare dovranno costituire una catena di rapporti uguali, cioè tali distanze dovranno essere in progressione geometrica; in tal caso, però, se viceversa i punti A, B, C, D, E, F.....verificano tale proprietà, per affermare che essi appartengono a una spirale logaritmica tridimensionale, si dovranno verificare altre condizioni che vedremo in seguito e che dipendono dal tipo di spirale.

Definizione di superficie spirale logaritmica cilindrica

Nella trattazione che segue si farà uso, nella rappresentazione di punti nello spazio, oltre che delle coordinate cartesiane, delle coordinate cilindriche. Se il punto P ha, nel riferimento cartesiano Oxyz, coordinate (x, y, z) , la terna ordinata (ρ, ϑ, z) rappresenta quella delle corrispondenti coordinate cilindriche (vedi figura a)

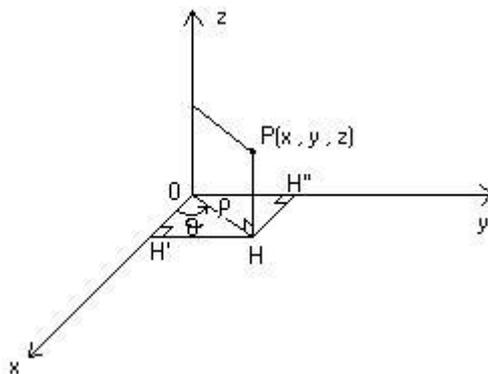


Figura a

Ovviamente le relazioni che legano i due tipi di coordinate sono:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Consideriamo una spirale logaritmica piana di equazione, in coordinate polari,

$$\rho = ae^{k \cdot \vartheta} \quad \text{con } a, k \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Nello spazio, la stessa equazione, in coordinate cilindriche, rappresenta una superficie cilindrica la cui intersezione con un generico piano perpendicolare all'asse z è, ovviamente, una spirale logaritmica piana. Chiameremo la (1) (considerata nello spazio) superficie spirale logaritmica cilindrica.

Nella figura b è rappresentata la superficie spirale logaritmica cilindrica di equazione $\rho = \varphi^{\frac{2}{\pi} \cdot \vartheta}$, che diremo aurea (φ è il numero aureo $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$), ottenuta dalla (1) per $a=1$ e $k=(\ln \varphi)/(\pi/2)$.

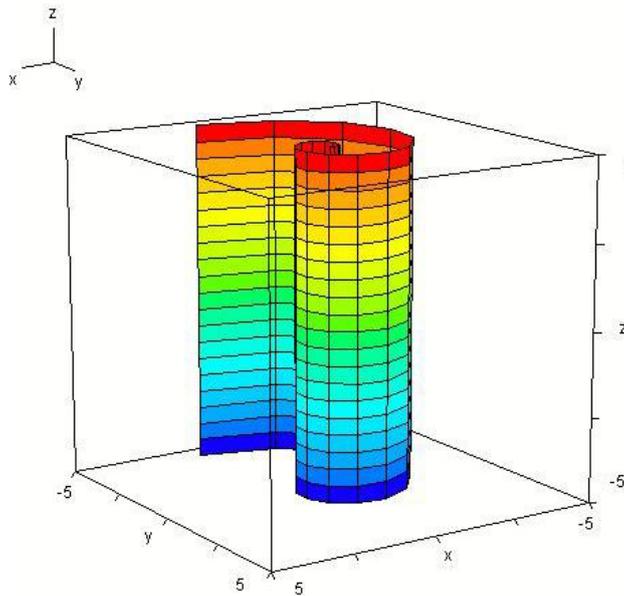


figura b

Le (curve) spirali logaritmiche tridimensionali

Le spirali logaritmiche nello spazio si possono pensare come intersezioni di una superficie spirale logaritmica cilindrica con una qualunque superficie $z=f(\rho)$ (con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$), strettamente monotona, avente l'asse z come asse di simmetria e definita su tutto il piano xy , oppure su tutto il piano xy tranne che nel punto $O(0;0)$ (ovviamente si tratta di curve che verificano la proprietà di cui al paragrafo 2).

Si otterranno così due tipi di spirali logaritmiche nello spazio: il primo intersecando la spirale logaritmica cilindrica con una superficie che incontra l'asse z in un suo punto proprio, il secondo intersecando la spirale logaritmica cilindrica con una superficie che si avvicina asintoticamente all'asse z e quindi lo incontra in un suo punto improprio.

Per esempio consideriamo due spirali individuate rispettivamente dalle seguenti coppie di equazioni (in coordinate cilindriche):

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \vartheta} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \vartheta} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases} \quad \text{con } a, k, t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

(per semplicità le superfici con le quali intersechiamo la spirale logaritmica cilindrica intersecano rispettivamente l'asse z nell'origine del riferimento e il piano xy lungo la circonferenza di centro nell'origine e raggio unitario).

Successioni di punti che individuano spirali del primo tipo

Se $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ è una successione di punti nello spazio con coordinate cilindriche $(\rho_i, \vartheta_i, z_i)$ tali che i moduli ρ_i e le quote z_i siano in progressione geometrica di ragioni rispettivamente q_1 e q_2 , e le anomalie ϑ_i siano in progressione aritmetica di ragione p , cioè tale che:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q_1 \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + p \quad z_i = z_{i-1} \cdot q_2,$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del primo tipo con

$$k = \frac{\ln q_1}{p} \quad \text{e} \quad t = \log_{q_1} q_2 = \frac{\ln q_2}{\ln q_1}$$

Dimostrazione: La successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ si può pensare come l'unione di due successioni, entrambe di primo elemento P_0 , la prima con indici crescenti ($P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$), la seconda con indici decrescenti ($P_0, P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \dots$). Dimosteremo quanto sopra applicando il principio d'induzione separatamente alle due successioni.

Prima successione:

il punto $P_0(a, 0, ha^t)$ appartiene alla curva

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \mathcal{G}} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_{i-1} appartiene a tale curva, vi appartiene anche il punto P_i . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_{i-1} \cdot q_1 = ae^{k \mathcal{G}_{i-1}} \cdot q_1 = ae^{\frac{\ln q_1}{p} \mathcal{G}_{i-1}} q_1 = a q_1^{\frac{\mathcal{G}_{i-1}}{p}} q_1 = a q_1^{\frac{\mathcal{G}_{i-1} + p}{p}} = a q_1^{\frac{\mathcal{G}_i}{p}} = ae^{\frac{\ln q_1}{p} \mathcal{G}_i} \\ &= ae^{k \mathcal{G}_i} \end{aligned}$$

e

$$z_i = z_{i-1} \cdot q_2 = h \rho_{i-1}^t \cdot q_2 = h \left(ae^{k \mathcal{G}_{i-1}} \right)^t q_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= h \left(a e^{\frac{\ln q_1 \cdot \vartheta_{i-1}}{p}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2 = h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2}{p} \cdot \vartheta_{i-1}} \cdot q_2 = h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}} \cdot q_2 = \\
&= h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2}{p} \cdot \vartheta_{i-1}} \cdot q_2 = h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}} \cdot q_2 = h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{\vartheta_{i-1} + p}{p}} = = \\
&= h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{\vartheta_i}{p}} = h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} e^{\frac{\ln q_2}{p} \cdot \vartheta_i} = h \left(a e^{\frac{\ln q_1 \cdot \vartheta_i}{p}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} = h (a e^{k \vartheta_i})^t = h \rho_i^t
\end{aligned}$$

il che prova che P_i appartiene alla curva.

Seconda successione:

il punto $P_0(a, 0, h a^t)$ appartiene alla curva

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \vartheta} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_i appartiene a tale curva, vi appartiene anche il punto P_{i-1} . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\rho_{i-1} &= \rho_i \cdot q_1^{-1} = a e^{k \vartheta_i} \cdot q_1^{-1} = a e^{\frac{\ln q_1 \cdot \vartheta_i}{p}} q_1^{-1} = a q_1^{\frac{\vartheta_i}{p}} q_1^{-1} = a q_1^{\frac{\vartheta_i - p}{p}} = a q_1^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}} = a e^{\frac{\ln q_1 \cdot \vartheta_{i-1}}{p}} \\
&= a e^{k \vartheta_{i-1}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
z_{i-1} &= z_i \cdot q_2^{-1} = h \rho_i^t \cdot q_2^{-1} = h (a e^{k \vartheta_i})^t q_2^{-1} = \\
&= h \left(a e^{\frac{\ln q_1 \cdot \vartheta_i}{p}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2^{-1} = h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2}{p} \cdot \vartheta_i} \cdot q_2^{-1} = h a^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot q_2^{\frac{\vartheta_{i-1}}{p}} \cdot q_2^{-1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} \cdot e^{\frac{\ln q_2}{p} \mathcal{G}_i} \cdot q_2^{-1} &= ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{\mathcal{G}_i}{p}} \cdot q_2^{-1} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{\mathcal{G}_i - p}{p}} = ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} q_2^{\frac{\mathcal{G}_{i-1}}{p}} = \\
&= ha^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} e^{\frac{\ln q_2}{p} \mathcal{G}_{i-1}} = h \left(ae^{\frac{\ln q_1}{p} \mathcal{G}_{i-1}} \right)^{\frac{\ln q_2}{\ln q_1}} = h(ae^{k \mathcal{G}_{i-1}})^t = h \rho_{i-1}^t
\end{aligned}$$

il che prova che P_{i-1} appartiene alla curva.

Quindi se i punti della successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ verificano le condizioni:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q_1 \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + p \quad z_i = z_{i-1} \cdot q_2$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del tipo

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \mathcal{G}} \\ z = h \cdot \rho^t \end{cases}$$

con

$$k = \frac{\ln q_1}{p} \quad \text{e} \quad t = \log_{q_1} q_2 = \frac{\ln q_2}{\ln q_1}$$

($z_i = z_{i-1} \cdot q_2$, cioè che le quote siano in progressione geometrica di ragione q_2 , è la condizione in più che per le spirali tridimensionali del primo tipo è necessaria rispetto a quanto detto nel secondo paragrafo).

Come esempio, se $\rho_0 = z_0 = 1$ e

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot \varphi \quad z_i = z_{i-1} \cdot \varphi \quad \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1} + \frac{\pi}{2},$$

la successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ individua la spirale (che diremo aurea del primo tipo)

$$\begin{cases} \rho = \varphi^{\frac{2}{\pi} \cdot \theta} \\ z = \rho \end{cases}$$

Nella figura *c* sono rappresentate singolarmente le due superfici la cui intersezione genera una spirale del primo tipo:

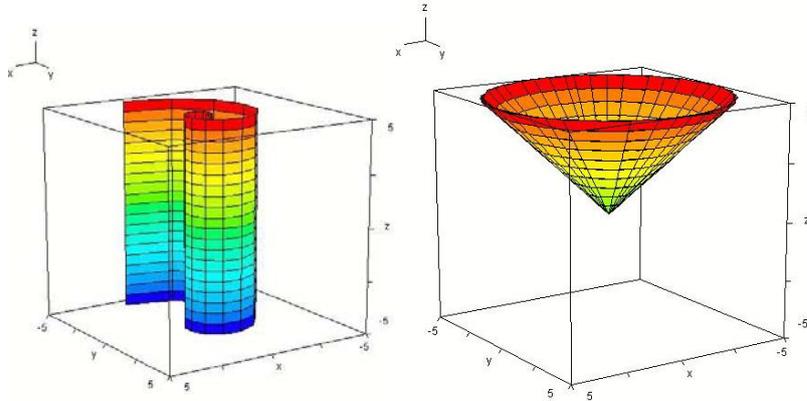
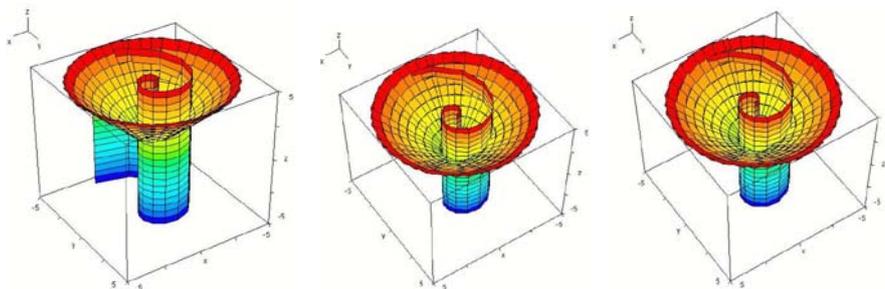


figura *c*

(si tratta della superficie spirale logaritmica cilindrica definita nel terzo paragrafo e della superficie conica indefinita a una falda avente vertice in O e angolo di apertura di 45°)

Nella figura *d* è rappresentata l'intersezione delle due superfici, vista da angolazioni diverse:



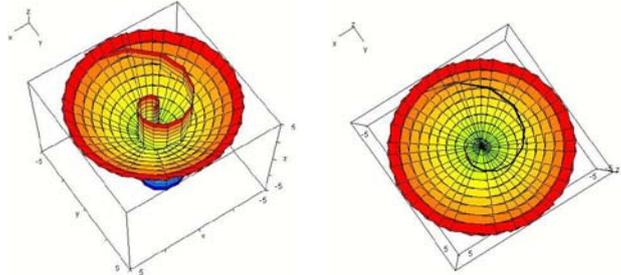


figura d

Successioni di punti che individuano spirali del secondo tipo

Se $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ è una successione di punti nello spazio con coordinate cilindriche $(\rho_i, \vartheta_i, z_i)$ tali che i moduli ρ_i siano in progressione geometrica di ragione q , e le anomalie ϑ_i e le quote z_i siano in progressioni aritmetiche di ragione rispettivamente p_1 e p_2 , cioè tale che:

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q \quad \vartheta_i = \vartheta_{i-1} + p_1 \quad z_i = z_{i-1} + p_2,$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del secondo tipo con

$$k = \frac{\ln q}{p_1} \quad \text{e} \quad t = \frac{p_2}{\log_b q} = p_2 \cdot \frac{\ln b}{\ln q}$$

(se $b=e$, risulterà $t = \frac{p_2}{\ln q}$)

Dimostrazione: Analogamente a quanto fatto per le spirali del primo tipo, anche in questo caso dimostreremo quanto sopra applicando il principio d'induzione separatamente alle due successioni di primo elemento P_0 , la prima con indici crescenti, la seconda con indici decrescenti; inoltre, per quanto riguarda la funzione $\rho(\vartheta)$, la

dimostrazione, per le due successioni, è quella del paragrafo precedente, dato che la superficie logaritmica cilindrica è la stessa e pertanto non la riporteremo nuovamente, ma ci limiteremo ad applicare il principio d'induzione solo alla superficie di equazione $z=f(\rho)$.

Prima successione:

il punto $P_0(a,0,\log_b a^t)$ appartiene alla curva:

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot g} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_{i-1} appartiene a tale curva vi appartiene anche il punto P_i . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned} z_i &= z_{i-1} + p_2 = \log_b \rho_{i-1}^t + p_2 = \log_b (ae^{k \cdot g_{i-1}})^t + p_2 = \\ &= \log_b \left(ae^{\frac{\ln q \cdot g_{i-1}}{p_1}} \right)^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + p_2 = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{p_2 \frac{\ln b}{p_1} g_{i-1}} + p_2 = \\ &= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2 \cdot g_{i-1}}{p_1}} + \log_b b^{p_2} = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{p_2 \left(\frac{g_{i-1} + p_1}{p_1} \right)} = \\ &= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2 \cdot g_i}{p_1}} = \log_b (a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot b^{\frac{p_2 \cdot g_i}{p_1}}) = \\ &= \log_b (a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{\frac{p_2 \cdot \ln b \cdot g_i}{p_1}}) = \log_b (a \cdot e^{\frac{\ln q \cdot g_i}{p_1}})^{\frac{\ln b}{\ln q} p_2} = \log_b (ae^{k \cdot g_i})^t = \log_b \rho_i^t \end{aligned}$$

il che prova che P_i appartiene alla curva.

Seconda successione:

il punto $P_0(a, 0, \log_b a^t)$ appartiene alla curva:

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot g} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases}$$

quindi, per il principio d'induzione, basterà far vedere che, se P_i appartiene a tale curva, vi appartiene anche il punto P_{i-1} . A tale scopo, osserviamo che:

$$\begin{aligned} z_{i-1} &= z_i - p_2 = \log_b \rho_i^t - p_2 = \log_b (a e^{k g_i})^t - p_2 = \\ &= \log_b \left(a e^{\frac{\ln q \cdot g_i}{p_1}} \right)^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} - p_2 = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{p_2 \frac{\ln b \cdot g_i}{p_1}} - p_2 = \\ &= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2 \cdot g_i}{p_1}} - \log_b b^{p_2} = \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{p_2 \left(\frac{g_i - p_1}{p_1} \right)} = \\ &= \log_b a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} + \log_b b^{\frac{p_2 \cdot g_{i-1}}{p_1}} = \log_b (a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot b^{\frac{p_2 \cdot g_{i-1}}{p_1}}) = \\ &= \log_b (a^{p_2 \frac{\ln b}{\ln q}} \cdot e^{\frac{p_2 \cdot \ln b \cdot g_{i-1}}{p_1}}) = \\ &= \log_b (a \cdot e^{\frac{\ln q \cdot g_{i-1}}{p_1}})^{\frac{\ln b}{\ln q} p_2} = \log_b (a e^{k g_{i-1}})^t = \log_b \rho_{i-1}^t \end{aligned}$$

il che prova che P_{i-1} appartiene alla curva.

Quindi se i punti della successione $\{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ verificano le condizioni:

$$\boxed{\rho_i = \rho_{i-1} \cdot q \quad g_i = g_{i-1} + p_1 \quad z_i = z_{i-1} + p_2}$$

tale successione individua nello spazio una spirale logaritmica del tipo

$$\begin{cases} \rho = a \cdot e^{k \cdot \vartheta} \\ z = \log_b \rho^t \end{cases}$$

con

$$k = \frac{\ln q}{p_1} \quad \text{e} \quad t = \frac{p_2}{\log_b q} = p_2 \cdot \frac{\ln b}{\ln q}$$

($z_i = z_{i-1} + p_2$, cioè che le quote siano in progressione aritmetica di ragione p_2 , è la condizione in più che per le spirali tridimensionali del secondo tipo è necessaria rispetto a quanto detto nel secondo paragrafo).

Come esempio, se $\rho_0 = 1, z_0 = 0, b = \varphi$ e

$$\rho_i = \rho_{i-1} \cdot \varphi \quad \vartheta_i = \vartheta_{i-1} + \frac{\pi}{2},$$

la successione $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ individua la spirale (che diremo aurea del secondo tipo)

$$\begin{cases} \rho = \varphi^{\frac{2 \cdot \vartheta}{\pi}} \\ z = \log_{\varphi} \rho \end{cases}$$

Nella figura *e* sono rappresentate singolarmente le due superfici la cui intersezione genera una spirale del secondo tipo:

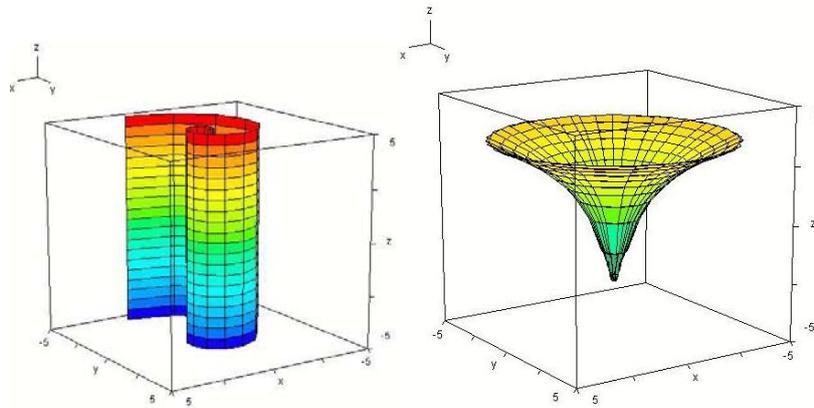
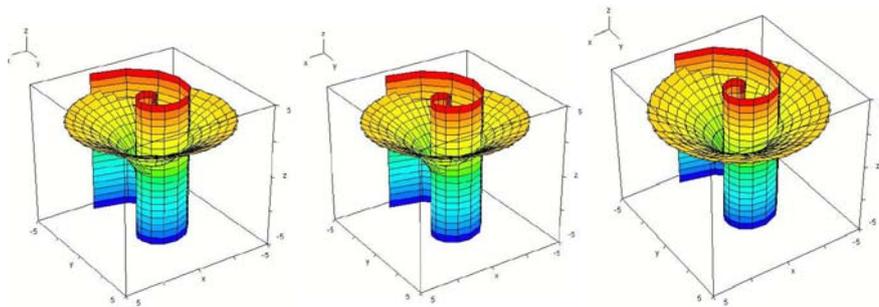


figura e

(si tratta della superficie spirale logaritmica cilindrica definita nel terzo paragrafo e della superficie individuata dalla rotazione completa intorno all'asse z del grafico della funzione logaritmica avente equazione, nel piano yz, $z = \log_{\varphi} y$)

Nella figura f è rappresentata l'intersezione delle due superfici, vista da angolazioni diverse:



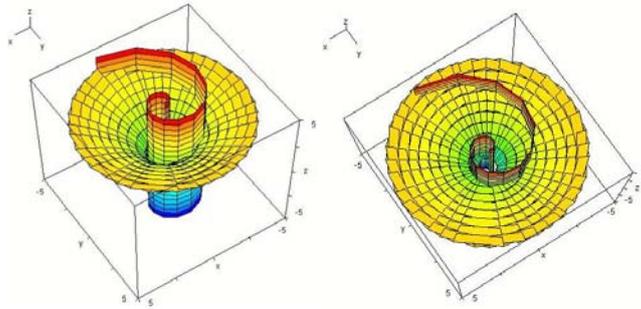


figura *f*

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. CAMPEDELLI, *Lezioni di geometria*, Cedam, Padova, 1966.
- [2] E. TORRICELLI, *De infinitis spiralibus* (trad. E. Carruccio),
“Quaderni di Storia e critica della Scienza”, n° 3, 1955.